

# Numerička simulacija efekta gravitacionih sočiva

---

*Cilj rada je bio razvijanje numeričkih metoda za dobijanje položaja likova objekata i njihovog sjaja prilikom prolaska svetlosti pored gravitacionog sočiva. Razmatrani modeli objekata koji predstavljaju gravitaciono sočivo su tačkasto sočivo, izotermalna sfera sa i bez jezgra konačne mase i radijusa, kao i slučaj kada se u jednoj ravni nalazi više tačkastih sočiva. Kao najsloženiji slučaj, simulirani su likovi koji se formiraju pri trodimenzionalnoj raspodeli tačkastih sočiva. Razvijena su dva osnovna algoritma, jedan za dobijanje položaja i drugi za dobijanje sjaja lika, koji su se u proučavanim slučajevima pokazali kao efikasni.*

---

## Uvod

Masivni objekti koji svojim gravitacionim poljem izazivaju zakrivljenje prostora i time savijanje svetlosnih zrakova koji prolaze u njihovoj blizini, po analogiji sa optičkim nazivaju se gravitaciona sočiva. Proučavanja gravitacionih sočiva dala su značajan doprinos u rešavanju fundamentalnih pitanja kosmologije, poput određivanja starosti Vasiona i vrednosti Hablove konstante. Zbog efekta koji izazivaju mogu se koristiti i kao prirodni teleskopi za posmatranje objekata malog sjaja. Prvi direktni snimak gravitacionog fokusiranja dobijen je 1979. godine kada je snimljen lik kvazara QSO 0957+561 (Cooper 2004).

U cilju razumevanja principa formiranja likova neophodno je praviti numeričke simulacije prolaska svetlosnih zrakova kroz gravitaciono sočivo. Cilj ovog projekta je razvijanje efikasnih algoritama za modeliranje likova na osnovu zadatih fizičkih parametara sistema sočiva, posmatrača i lika.

## Teorijsko razmatranje problema

### Fizika problema

Iz jednačina Ajnštajnovne opšte teorije relativnosti sledi da ako najbliže rastojanje na kome je zrak prošao pored nekog tačkastog objekta mase  $M$  iznosi onda će zrak svetlosti biti skrenut sa početne putanje (prelomljen) za ugao koji iznosi:

$$\alpha(\xi) = \frac{4GM}{c^2 \xi} \quad (1)$$

U slučaju više tačkastih sočiva u jednoj ravni ukupan ugao skretanja zraka računa se preko doprinosa svih pojedinačnih izvora. Za računanje ukupnog ugla skretanja zraka kod slučaja više tačkastih sočiva u jednoj ravni korišćena je vektorska aktivnost pomenutog ugla opisana jednačinom:

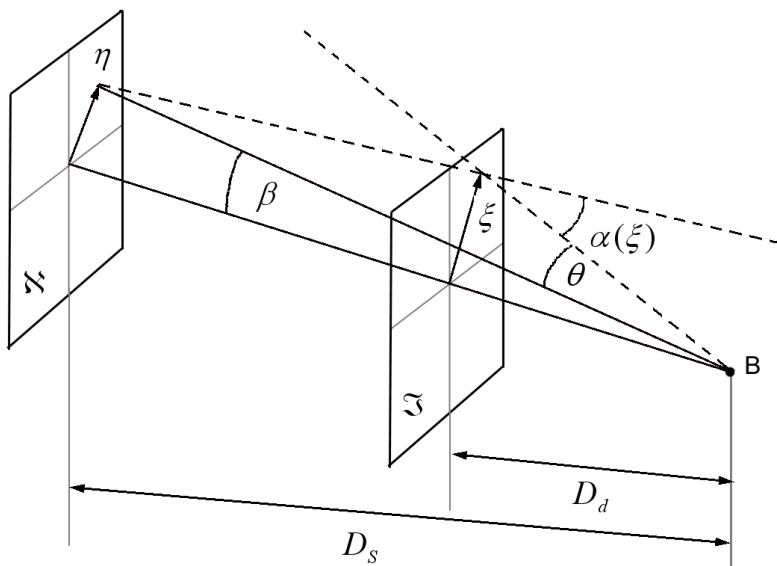
$$\alpha(\xi_{i=1 \dots n}) = \sum_{i=1}^n \alpha(\xi_i) \quad (2)$$

Na slici 1 obeležene su najbitnije veličine koje karakterišu optički sistem posmatrač-sočivo-izvor. Ravni koje sadrže izvor i sočivo su normalne na pravu koja spaja posmatrača i izvor.

Jednačina koja određuje udaljenost tačke u ravni izvora iz koje kreće zrak u funkciji rastojanja između posmatrača i sočiva i izvora (Newbury, Spit-eri 2002), u aproksimaciji malih uglova je:

$$\eta = \frac{D_s}{D_d} \xi - (D_s - D_d) \alpha(\xi) \quad (3)$$

U radu je razmatran i površinski sjaj lika koji se dobije pri prolasku svetlosti kroz gravitaciono sočivo. Pretpostavimo da posmatrač detektuje svetlost fluksa  $d\Phi_1$  sa delića površine  $dS_1$  koji pripada ravni lika. Ova svetlost potiče sa delića površine  $dS_2$  na ravni na kojoj je izvor svetlosti i karakteriše je fluks  $d\Phi_2$ . Gravitaciono sočivo zadržava površin-



Slika 1. Optički sistem posmatrač-sočivo-izvor i veličine koje karakterišu ovaj sistem

Figure 1. Optical system observer-lens-object and parameters in this system

ski sjaj objekta, tako da važi jednakost (Newbury, Spiteri 2002):

$$\frac{d\Phi_1}{dS_1} = \frac{d\Phi_2}{dS_2} \quad (4)$$

Formula za faktor promene sjaja koji je jednak odnosu elementarnih flukseva  $d\Phi_1$  i  $d\Phi_2$ , izražena preko parametara sistema je (Wambsganss 1998):

$$\mu_{1,2} = \frac{\theta}{\beta} \frac{d\theta}{d\beta} = \frac{v^2 + 2}{2v\sqrt{v^2 + 4}} \pm \frac{1}{2} \quad (5)$$

U radu se koristi isključivo pozitivni faktor, jer se posmatra sa strane sa koje je ugao  $\theta$  pozitivan, gde važi smena  $v = \beta / \theta_e$ , a  $\theta_e$  je Ajnštajnov radijus definisan kao:

$$\theta_e = \left( \frac{4GM}{c^2} \frac{D_s - D_d}{D_d D_s} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

## Vrste sočiva

Na osnovu prostornog rasporeda mase sočiva u radu su razmatrani sledeći slučajevi: tačkasto sočivo, više tačkastih sočiva u jednoj ravni, izotermalna

sfera sa i bez jezgra konačne mase i radijusa, a kao najopštiji slučaj je razmatran određen broj pojedinačnih tačkastih sočiva proizvoljno raspoređenih u prostoru.

Za razliku od tačkastog sočiva, izotermalna sfera predstavlja objekat sa masom raspoređenom u prostoru po funkciji (Wambsganss 1998):

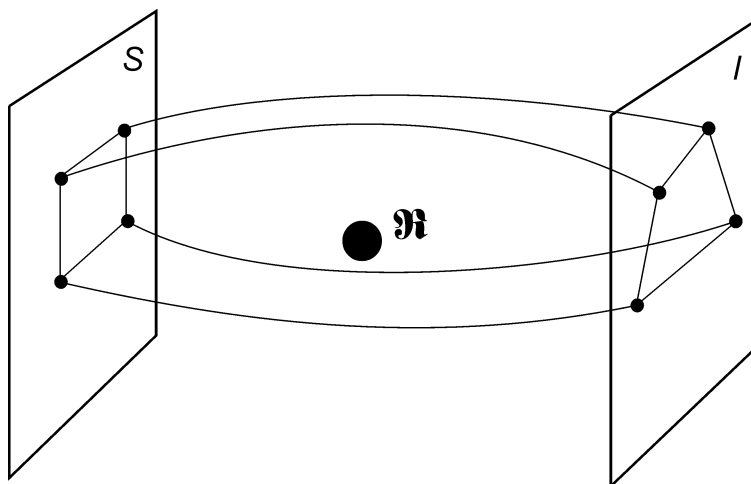
$$M(\xi) = \frac{1}{2G} \frac{\sigma^2}{\xi} \quad (7)$$

gde je  $\sigma$  maseni parametar koji zavisi od fizičkih karakteristika objekta. Kao gravitaciono sočivo je korišćena i izotermalna sfera sa jezgrom proizvoljne mase i radijusa.

## Metod

Svi izvori i likovi su razmatrani kao matrice određenih dimenzija, pri čemu vrednosti polja matrice predstavljaju sjaj piksela.

Program redom analizira svaki piksel matrice lika i pri tome određuje piksele na objektu sa kojih su pošli zraci svetlosti. U slučaju tačkastog sočiva položaj piksela sa koga je pošao zrak svetlosti se određuje trivijalno korišćenjem jednačine (3), a sjaj



Slika 2. Šematski prikaz novog metoda za računanje promene sjaj u slučaju asimetričnih sočiva

Figure 2. Schematic discription of the new method which was used for calculating magnification factor for

piksela za koji se ispostavi da je vidljiv iz tačke u kojoj je posmatrač određuje se po formuli (5). Slučaj više tačkastih sočiva proizvoljno raspoređenih u prostoru je komplikovaniji i proračuni uglova skretanja i sjaja se ne vrše po unapred izvedenim analitičkim jednačinama. Za određivanje sjaja razvijen je algoritam (slika 2) za numeričko izračunavanje promene sjaja u svakoj tački. Piksela lika, koji je kvadratnog oblika, se pod uticajem sočiva transformiše u četvorougao drugačije površine i sjaj se računa korišćenjem zakona održanja fluksa datog jednačinom (4).

Osnovna ideja kod određivanja ugla skretanja zraka kod ovih sistema sočiva zasniva se na vektorskoj aditivnosti ugla opisanoj jednačinom (2). Putanja zraka se prati kroz ravni svih sočiva. Na taj način je na osnovu tačke preseka putanje zraka sa ravni najbližom posmatraču moguće utvrditi tačku iz koje je zrak krenuo. Putanja zraka se prati u smeru od posmatrača ka ravni izvora korišćenjem tri podatka: polazne koordinate na prethodnoj ravni, presečne koordinate sa sledećom ravni kao i ugla skretanja zraka posle propagacije kroz narednu ravan. Ukupan faktor promene sjaja se može dobiti kao proizvod faktora promena sjaja za svako sočivo. Pri tome se ovi podaci "ažuriraju" prilikom prelaska na novu ravan čime se posle konačnog broja koraka (tačan broj koraka jednak je broju ravni) dolazi do ravni na kojoj se nalazi svetlosni izvor a koordinate

tačke sa koje je pošao zrak su koordinate probojne tačke na toj ravni.

Opisani algoritmi su realizovani korišćenjem programskog paketa Matlab 5.0.

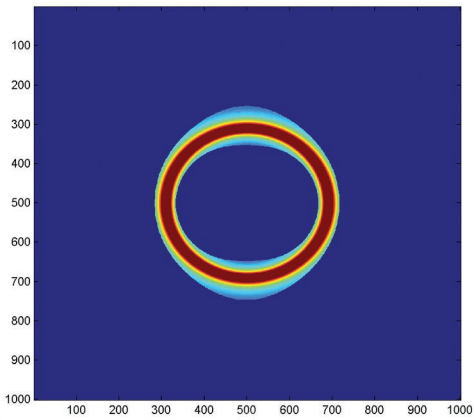
## Rezultati i diskusija

Krajnji rezultat svakog izvršavanja programa je slika objekta nakon dejstva gravitacionog sočiva. Likovi su prikazani na slici 3 u "lažnim bojama", pri čemu plava boja odgovara najnižem intezitetu, a crvena najvišem.

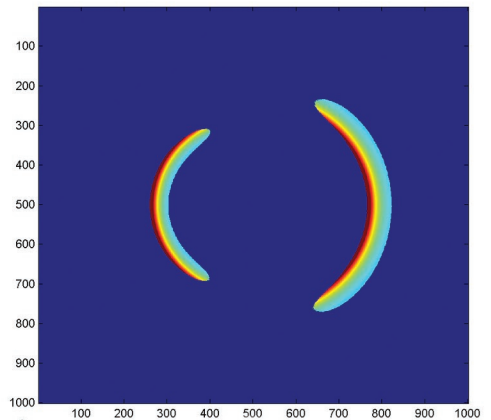
Izvor svetlosti u svim slučajevima je elipsa ravnornog sjaja. Lik na slici 3a predstavlja tzv. Ajnštajnov prsten, koji se dobija kada se izvor svetlosti, sočivo i posmatrač nalaze na istoj pravoj. Na slici 3b je lik dobijen posle prolaska svetlosti pored tačkastog sočiva pri čemu pomenuti objekti ne leže na istoj pravoj. Na slikama 3c i 3d su likovi dobijeni usled postojanja više tačkastih sočiva u jednoj ravni. Na slikama 3e i 3f su likovi eliptičnog izvora deformisani posle prolaska svetlosti pored više tačkastih gravitacionih sočiva raspoređenih u različitim ravnima.

Uočena je sličnost dobijenih likova sa likovima realnih objekata ali zbog nepoznavanja stvarnih parametara sistema nije bilo moguće kvantitativno upoređivanje. Algoritmi opisani u radu su primenljivi kod inverznih problema gde se na osnovu

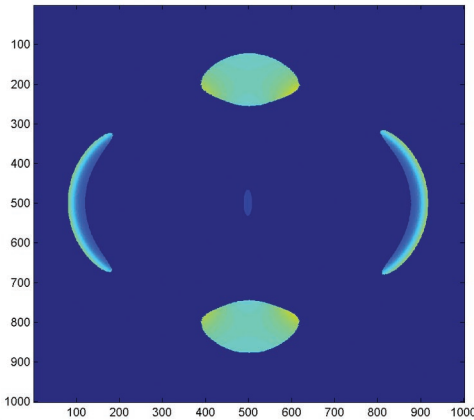




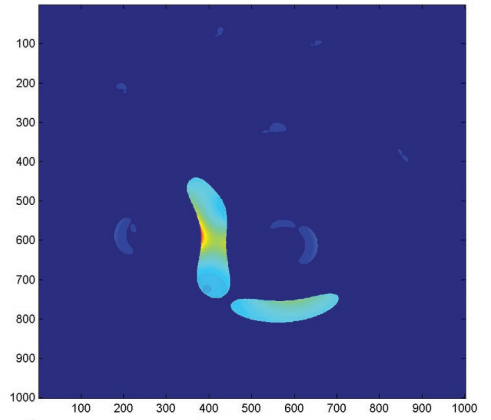
a



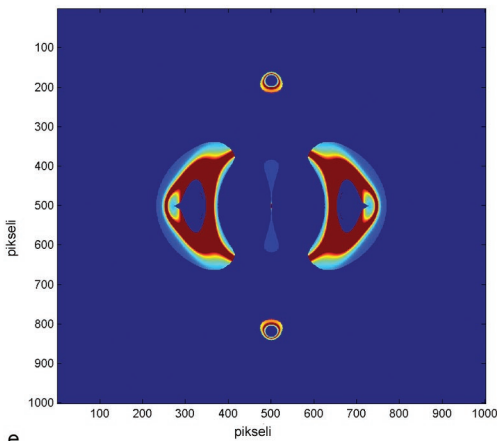
b



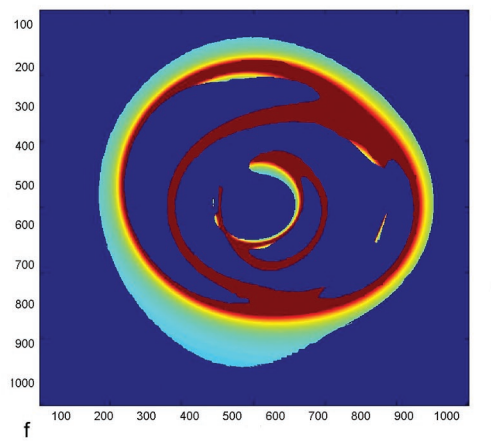
c



d

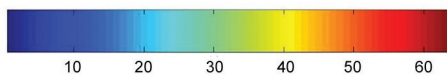


e



f

SKALA INTENZITETA



10

20

30

40

50

60

karakteristika likova dobijenih posmatranjem mogu izvesti zaključci o fizičkim osobinama objekata koji predstavljaju gravitaciono sočivo.

## 4. Zaključak

Numerički metodi razvijeni u ovom radu primenjivi su za širokom opsegu fizičkih modela sočiva i njihova efikasnost, odnosno brzina, je dovoljna za konstrukciju likova u realnom vremenu pri čemu se mogu dobiti slike sasvim dovoljne rezolucije za donošenje nekih zaključaka o principima formiranja likova.

**Zahvalnost.** Zahvaljujem se rukovodiocu seminara astronomije u Istraživačkoj stanici Petnica, Igoru Smoliću kao i saradnicima Andreju Mesarošu i Mihailu Čubroviću koji su svojim predlozima i sugestijama znatno doprineli izradi projekta. Zahvaljujem se i Dr. Milanu Ćirkoviću na dostavljenoj literaturi. Zahvalnost dugujem i Mr. Dragiši Nikoliću iz Pirota, na veoma korisnim sugestijama i finalnoj recenziji.

---

## Literatura

Cooper R. L. 2004. *History, overview and basic theory of gravitational lensing*. University of Illinois

Newbury P. R., Spiteri R. J. 2002. *Inverting gravitational lenses*. Cambridge

Wambsgans J. 1998. *Gravitational lensing in astronomy*. Potsdam: Astrophysical institut Potsdam, Germany

Slika 3 (naspravna strana).

Likovi izvora svetlosti dobijeni posle izvršavanja implementirane simulacije za zadate parametre

---

Figure 3 (opposite page).

Distorted images of background light source obtained after execution of implemented computer simulation for certain parametres

---

Marko Pavlović

## Numerical Modeling of Gravitational Lensing Effect

Gravitational lensing provides a powerful tool to study a number of fundamental questions in astrophysics. In this paper we give an outline of the basic concepts and mathematics behind gravitational lensing and numerical modeling. An emphasis was put on developing the numerical methods and computer simulation of these effects. Numerics was used for studying the effects which become observable when light rays pass near some object with strong gravitational field. We studied different physical models of gravitational lenses: point lens, isothermal sphere with and without core with definite mass and radius and asymmetric lens in plane. We also studied effects of lenses with 3-dimensional mass configuration. Two basic algorithms were developed, first for determination of image position and second to determine the amount by which light is magnified after passing through the lens. Algorithm for determination of image position is based on ray-tracing and therefore it searches for pixels which satisfy basic mathematical conditions to become observable. Algorithm which was used for calculating magnification factor for simple lens models is based on mathematical formula from reference book which gives this value. For more complicated lenses, like asymmetric lenses, we developed new algorithm, based on physical principle that gravitational lensing preserves the surface brightness of the light. These algorithms proved to be efficient for solving problems under consideration.

