

Univerzalnost i skaliranje parametara haotičnog transporta u perturbovanim hamiltonijanskim sistemima: kinetički model i numerički testovi

Dat je kratak opis novog kinetičkog modela transporta u autonomnim perturbovanim hamiltonijanskim sistemima. Polazeći od topološke i geometrijske strukture faznog prostora, koju opisuje KAM teorija, izvedene su kinetičke jednačine za četiri relevantna mehanizma transporta: rezonance, kantorse, ostrva stabilnosti i Arnoldovu mrežu. Dade su relacije skaliranja verovatnoće i brzine bekstva sa vremenom, kao i vremenskih skala bekstva sa jačinom perturbacije i Ljapunovljevim vremenom. Takođe su dati rezultati numeričkih testova pomenutih zakona skaliranja.

Uvod

Iako je dinamika hamiltonijanskih sistema uglavnom dobro proučena, transportni procesi i, naročito, globalne karakteristike transporta su još uvek velikim delom nepoznati. Uzrok tome je složena struktura faznog prostora u tipičnom hamiltonijanskom sistemu, koja predstavlja “mešavinu” regularnih i stohastičnih regiona. Analitičke procene stabilnosti i vremenskih skala bekstva (zasnovane na KAM teoriji) su u većini slučajeva nerealne, jer su analitičke procene obično “slabe”, tj. zahtevaju veoma stroge uslove da bi mogle biti primenjene, a i tada često ne pružaju kompletnan opis transporta. Početkom devedestih godina pojavio se kinetički pristup hamiltonijanskom haosu (v. npr. Zaslavsky 2002 *a*) koji je, uvođenjem tzv. frakcione kinetike (matematički zasnovane na frakcionoj analizi, tj. izvodima i integralima necelobrojnog reda), omogućio dobijanje realističnijih rezultata, čak i u slučajevima koji ne dozvoljavaju uobičajen kinetički opis (zbog izrazite nehomogenosti pojedinih struktura u faznom prostoru).

Posebno aktuelan deo teorije haotičnog transporta su relacije skaliranja parametara transporta, jer omogućavaju jednostavnu procenu evolucije sistema. Skaliranje vremena bekstva (tj. vremena koje je potrebno da telo

*Mihailo Čubrović
(1985), Beograd,
Miroslava Jovanovića
7/2, učenik 3.
razreda Matematičke
gimnazije u Beogradu*

dospe u široku stohastičnu zonu faznog prostora i započne praktično neograničeno i nepredvidivo kretanje u njoj) primećeno je u asteroidnom pojasu (Murrison *et al.* 1992, 1994), i to kao stepeno skaliranje sa vremenom Ljapunova. Numeričke potvrde skaliranja verovatnoće bekstva iz datog regiona dobili su Kandrup i saradnici (Kandrup *et al.* 1999) za pojedine galaktičke potencijale. Morbideli je izložio ideju o postojanju dva režima stabilnosti (Morbidelli i Froeschle 1996), pri čemu prvom odgovara eksponencijalno, a drugom stepeno skaliranje. Pojedini autori su, međutim, osporili ove rezultate (Varvoglis i Anastasiadis 1996).

Cilj ovog rada je konstrukcija modela transporta zasnovanog na frakcionoj kinetici (koju ni jedan od prethodnih autora nije koristio), koji bi uključio geometrijska i topološka predviđanja KAM teorije, ali ne bi bio vezan za njena predviđanja vremenskih skala, i koji bi pružio odgovor na pitanje o postojanju dva različita režima, kao i o postojanju relacija skaliranja. Takođe, potrebno je izvršiti temeljnije numeričke provere ovih relacija, koje su do sada testirane na malom broju hamiltonijana.

Konstrukcija kinetičkog modela

Osnovna ideja u izgradnji modela bila je podela sistema na tzv. gradivne blokove, pri čemu za svaki tip gradivnog bloka treba konstruisati posebnu kinetičku jednačinu, a zatim izvesti jednačinu globalne evolucije sistema kombinovanjem gradivnih blokova. Sličan pristup koristili su, za disipativne sisteme, Denisov i saradnici (Denisov *et al.* 2002). Korišćen je sledeći oblik frakcione kinetičke jednačine (Zaslavsky 2002a):

$$\frac{\partial^\beta P(I, t)}{\partial t} = \frac{\partial^\alpha}{\partial |I|} \left[A(I) \frac{\partial^\alpha P(I, t)}{\partial |I|} \right]$$

pri čemu $P(I, t)$ predstavlja funkciju raspodele, koja zavisi od dejstva (korišćene su promenljive dejstvo-ugao) i vremena, dok je sa A označen koeficijent difuzije. Eksponenti α i β označavaju red parcijalnih izvoda, koji više ne mora biti ceo. Ovi eksponenti sadrže u sebi informaciju o topologiji sistema, i mogu se odrediti ako je ona poznata.

Sistemi koje smo razmatrali imaju oblik:

$$H(I, \varphi) = H_{\text{Int}}(I) + \varepsilon H_{\text{Pert}}(I, \varphi)$$

gde ε označava jačinu perturbacije (pozitivni bezdimenzioni parametar). Integrabilni deo zavisi, kao što je poznato, samo od dejstava, dok perturbacija sadrži i zavisnost od uglova.

Frakcionom kinetičkom jednačinom opisan je transport u svakom od četiri tipa gradivnog bloka. Prvi tip su rezonance, preciznije stohastični slojevi rezonanci, koji, kao što je poznato, predstavljaju osnovni uzrok nestabilnosti. Ovaj tip ima dva podtipa: prvom odgovaraju rezonance koje se

mogu svesti na tzv. Njehoroševljevu normalnu formu, što znači da ne intereaguju sa drugim rezonancama, dok drugi podtip jesu rezonance u Kolmogorovljevoj normalnoj formi, koje se delimično ili potpuno preklapaju sa drugim rezonancama.

Drugi tip gradivnog bloka predstavljaju kantorusi – fraktalni skupovi koji preostaju posle uništenja KAM torusa. Oni se obično ponašaju kao kvazi-barijere, jer su šupljine koje sadrže, i kroz koje se vrši transport, obično uske i zahtevaju veoma dugo vreme za prolazak kroz njih.

Treći tip blokova su hijerarhijske strukture koje okružuju rezonance i sastoje se od ostrva stabilnosti. Ove hijerarhije takođe su fraktalnog karaktera i modelirane su korišćenjem rezultata Zaslavskog koji se odnose na egzaktno fraktalni slučaj fracione kinetike (Afraimovich i Zaslavsky 1997; Zaslavsky 2002b). One se takođe ponašaju kao kvazi-barijere, jer tela koja “upadnu” u ove strukture obično prolaze kroz duge intervale regularnog kretanja.

Četvrti tip gradivnih blokova pojavljuje se samo u sistemima sa tri i više dimenzija (u fizičkom prostoru; ovo odgovara faznom prostoru sa šest i više dimenzija). U pitanju je Arnoldova difuzija, koja se vrši duž “niti” Arnoldove mreže. Arnoldova mreža omogućava zaobilazanje KAM torusa, koji u ovim sistemima (sa više od dve dimenzije) više ne predstavljaju nepropustljive barijere.

Fraciona kinetička jednačina je za svaki od gradivnih blokova analitički rešena, korišćenjem standardnih tehnika razdvajanja promenljivih, kao i razvojem po svojstvenim vrednostima (Herrchen 2000). Iskorišćeni su i rezultati Tzenova (2001), vezani za primenu teorije kritičnih pojava u dinamici. Svako rešenje je potom iskorišćeno za dobijanje asimptotske evolucije drugog momenta dejstva, što je uobičajen postupak fracione kinetike. Ovi rezultati imaju i svoju posebnu primenu u proučavanju transporta unutar jednog gradivnog bloka. Relacije skaliranja, kao i sama bekstva su, međutim, globalne pojave, koje zahtevaju uzimanje u obzir velikog broja gradivnih blokova kroz koje telo prolazi pri kretanju ka stohastičnom sloju rezonanci prvog reda – posle čega, u većini slučajeva, dolazi do neograničenog haotičnog kretanja.

Globalna evolucija i relacije skaliranja

Globalna evolucija sistema modelirana je prolaskom kroz veliki broj gradivnih blokova. Formalno, izračunati su asimptotski izrazi za dejstvo u limesu beskonačno velikog broja gradivnih blokova, pri čemu su verovatnoće prelaza između gradivnih blokova, kao i njihov redosled, dobijeni iz poznatih rezultata KAM teorije, posebno teoreme Njehoroševa (Chirikov 1979; Guzzo *et al.* 2001), kao i iz rezultata MekKeja (MacKay *et al.* 1987) vezanih za broj preostalih KAM torusa i kantorusa u zavisnosti od jačine perturbacije.

Zatim su dobijeni izrazi koji pokazuju skaliranje parametara transporta sa vremenom ili jačinom perturbacije. Za brzinu bekstva (definisanu kao broj tela koja u jedinici vremena napuste početni region) dobija se univerzalni zakon:

$$J(t) \propto e^{-pt}$$

gde p predstavlja verovatnoću bekstva (odnos broja pobjeglih čestica u jedinici vremena i ukupnog broja čestica u regionu), koja je približno konstantna. To nas dovodi do druge relacije skaliranja:

$$p \approx \text{const}$$

Navedena relacija važi za velike ansamble, koji zauzimaju više od jednog gradivnog bloka. Međutim, za ansamble koji se nalaze u jednom gradivnom bloku, verovatnoća bekstva se povećava po stepenom zakonu sve dok svi (ili skoro svi) članovi ansambla ne pobjegnu:

$$p \propto t^\alpha$$

Naravno, sva pomenuta skaliranja važe do određenog trenutka, kada je broj preostalih tela previše mali da bi pokazivao bilo kakvo kolektivno ponašanje (i kada, jasno, počinje opadanje verovatnoće, kao i brzine bekstva). Takođe, treba napomenuti da se univerzalnost koeficijenata (tj. konstantna verovatnoća p i konstanta α) odnosi samo na dati hamiltonijan, tj. ne postoji univerzalnost različitih hamiltonijana.

Sada prelazimo na relacije skaliranja vremenskih skala bekstva sa jačinom perturbacije. U ovom slučaju, dobijena su dva režima, u zavisnosti od udela KAM torusa i kantorusa kao faktora usporavanja transporta. U prvom režimu važi eksponencijalno skaliranje:

$$T_{\text{esc}} \propto \exp\left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)$$

gde ϵ_0 označava kritičnu perturbaciju koja označava granicu između režima. Za veće perturbacije, eksponencijalno skaliranje se zamenjuje stepenim:

$$T_{\text{esc}} \propto \epsilon^{-k}$$

Konačno, za vreme Ljapunova dobijeno je stepeno skaliranje sa jačinom perturbacije:

$$T_{\text{Ly}} \propto \epsilon^{-\nu}$$

Ovaj rezultat objašnjava i stepeno skaliranje vremenskih skala bekstva sa Ljapunovljevim vremenom, primećeno od strane nekih autora i pomenuto u uvodu. Takođe, jasno je da i za ovo skaliranje treba očekivati dva režima – stepeni i eksponencijalni.

Ovi rezultati bi mogli imati i praktičnu primenu pri izučavanju stabilnosti sistema kao što su asteroidni pojas ili objekti u galaktičkim potencijalima. I ovde univerzalnost eksponenata važi za različite početne uslove u faznom prostoru datog hamiltonijana.

Dobijen je i rezultat vezan za disperziju tela u ansamblu, preciznije za njenu evoluciju sa vremenom. Naime, u eksponencijalnom režimu se očekuje, uz zanemarivanje fluktuacija, konstantna vrednost disperzije, što se može interpretirati transportom kroz uske šupljine kantorusa i hijerarhije ostrva stabilnosti. U stepenom režimu očekuje se nezanemarljiv rast disperzije, usled transporta kroz široke stohastične slojeve rezonanci.

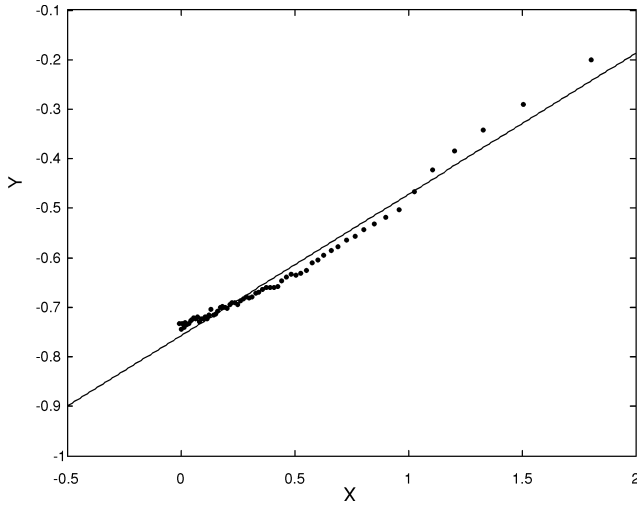
Na kraju, napominjemo da su navedeni rezultati važeći i za dvodimenzione, i za trodimenzione (i, generalno, višedimenzione) sisteme, jer je kompeticija između blokova sa sporim i blokova sa brzim transportom prisutna bez obzira na prisustvo ili odsustvo Arnoldove mreže, a upravo ova kompeticija dovodi do skaliranja.

Numerički testovi

Numerički testovi izvršeni su na devet hamiltonijana, šest dvodimenzionih i tri trodimenziona. Hamiltonijani 1-3 (tabela 1) su perturbovani harmonijski oscilatori, čija je primena, kao što je poznato, veoma široka (između ostalog, galaktički modeli, v. Kandrup i Sideris 2000). Hamiltonijani 4-6 su uopštenja perturbovanog Henon-Heiles potencijala, koji predstavlja aproksimaciju Toda potencijala, i koristi se za modeliranje kristala (Zaslavsky 2002a), kao i deformisanih galaksija (Kandrup *et al.* 1999). Hamiltonijani 7 i 8 su trodimenziona uopštenja hamiltonijana 1-3 i 4-6, respektivno. Hamiltonijan 9 je složeni, veštački konstruisan sistem, koji je i ranije korišćen (Morbidelli i Vergassola 1997) za testove kinetičkih modela haosa.

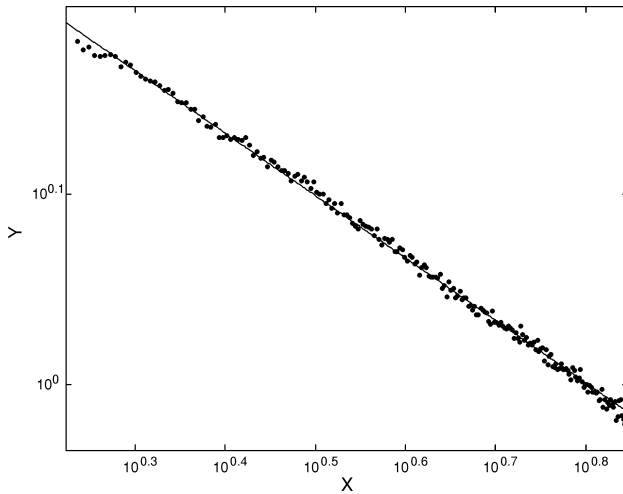
Tabela 1. Eksponenti skaliranja vremenskih skala bekstva i Ljapunovljevih vremena. Data je i vrednost jačine perturbacije za koju bekstvo u beskonačnost postaje energetski moguće (ϵ_0), kao i kraj eksponencijalnog (ϵ_{01}) i početak stepenog režima (ϵ_{02}).

H	ϵ_{Int}	ϵ_{01}	ϵ_{02}	η	k	ν
H_1	1.50	3.32±0.05	3.7±0.2	1.76±0.06	2.75±0.15	0.62±0.05
H_2	0.87	1.28±0.04	1.32±0.02	1.05±0.01	4.6±0.1	0.43±0.06
H_3	1.00	1.50±0.06	1.60±0.05	0.88±0.05	1.18±0.02	0.74±0.04
H_4	1.00	1.16±0.02	1.18±0.02	0.30±0.01	2.5±0.1	0.5±0.1
H_5	0.00	0.16±0.06	0.16±0.06	0.35±0.05	0.46±0.01	0.18±0.03
H_6	0.00	1.60±0.05	1.70±0.05	0.29±0.05	0.327±0.005	0.92±0.05
H_7	–	0.33±0.04	0.45±0.05	1.22±0.01	2.1±0.1	0.27±0.05
H_8	–	1.20±0.05	1.31±0.05	0.68±0.01	1.71±0.05	0.6±0.1
H_9	–	0.055±0.005	0.060±0.005	0.41±0.04	2.18±0.04	0.46±0.05



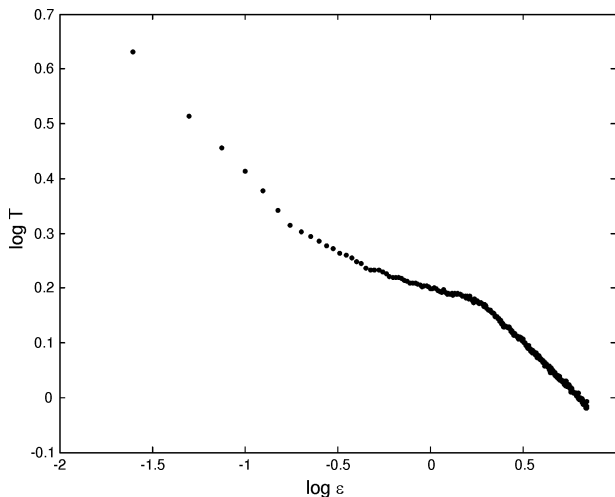
Slika 1.
Linearizovani grafik zavisnosti vremena bekstva od jačine perturbacije za hamiltonijan 3, u eksponencijalnom režimu.

Figure 1.
Linearized dependence of the escape time upon the perturbation strength for Hamiltonian No. 3 – the exponential regime.



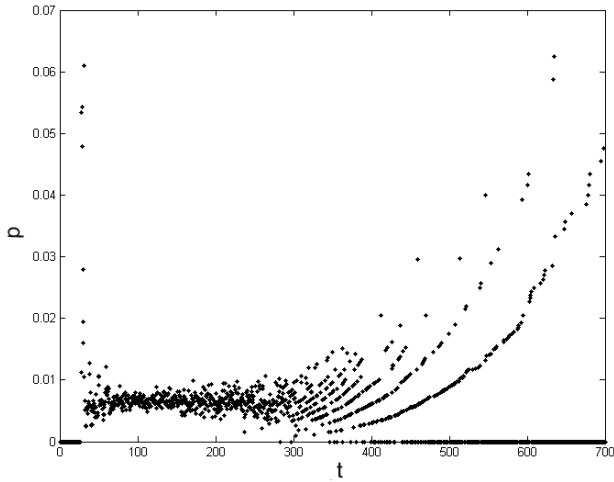
Slika 2.
Linearizovani grafik zavisnosti vremena bekstva od jačine perturbacije za hamiltonijan 3, u stepenom režimu.

Figure 2.
Linearized dependence of the escape time upon the perturbation strength for Hamiltonian No. 3 – the power-law regime.



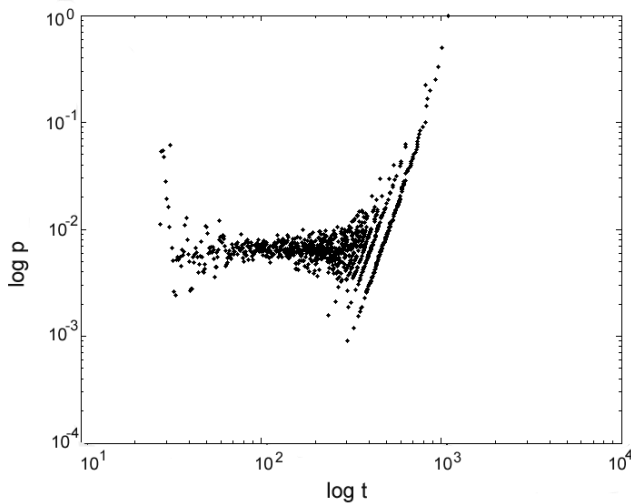
Slika 3.
Grafik zavisnosti vremena bekstva od jačine perturbacije za hamiltonijan 3, u logaritamskoj skali. Jasno je vidljiva granica između režima (početak linearnog skaliranja na grafiku).

Figure 3.
Dependence of the escape time upon the perturbation strength in logarithmic scale, for Hamiltonian No. 3. The critical change of the scaling is clearly visible (the beginning of the linear scaling on the figure).



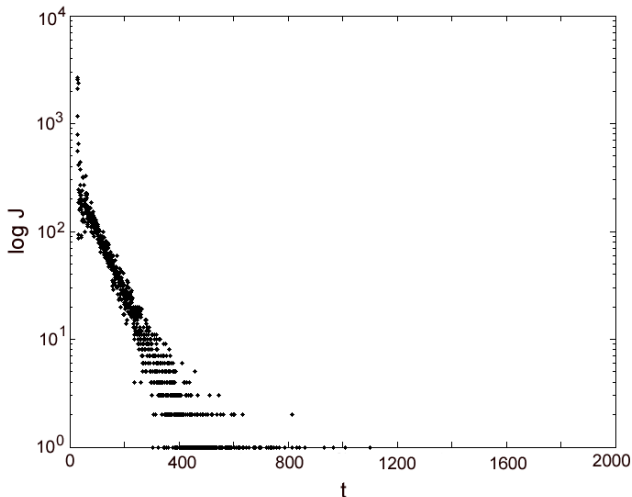
Slika 4.
Zavisnost verovatnoće bekstva od vremena. Uočljivo je da verovatnoća ostaje konstantna u dugom vremenskom intervalu – hamiltonijan 4.

Figure 4.
Time evolution of the escape probability. It is clearly visible how the escape probability remains approximately constant over a long interval of time – Hamiltonian No. 4.



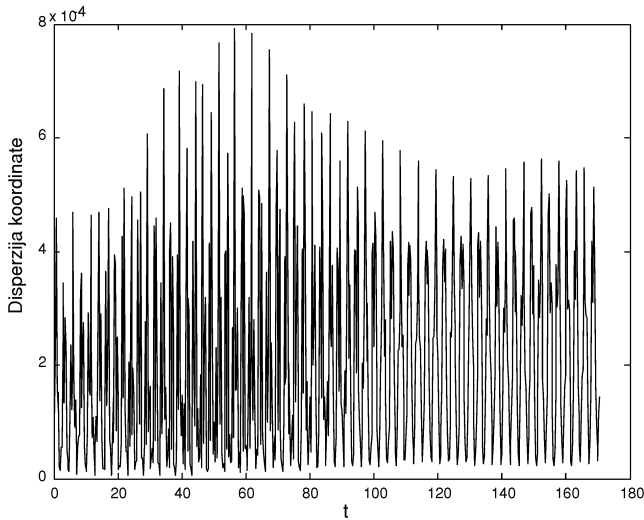
Slika 5.
Ista zavisnost kao na slici 4, ali na logaritamskoj skali. Vide se (naročito jasno u kasnijem periodu) populacije za koje verovatnoća raste po stepenom zakonu.

Figure 5.
The same plot as in Figure 4 but on a logarithmic scale. It can be noticed (especially for the later times) how some populations of objects experience a power-law increase of probability.



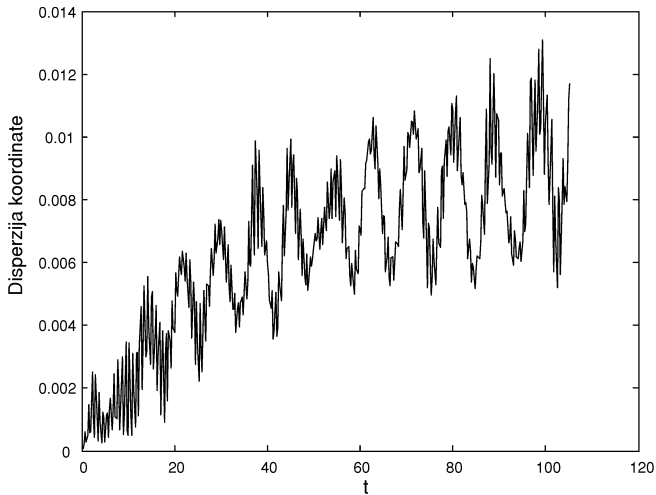
Slika 6.
Zavisnost brzine bekstva od vremena na semilogaritamskoj skali, za hamiltonijan 4. Zavisnost je konzistentna sa pretpostavkom o eksponencijalnom opadanju.

Figure 6.
Time evolution of the escape rate on a semilogarithmic scale, for Hamiltonian No. 4. The plot is consistent with the hypothesis of exponential decrease.



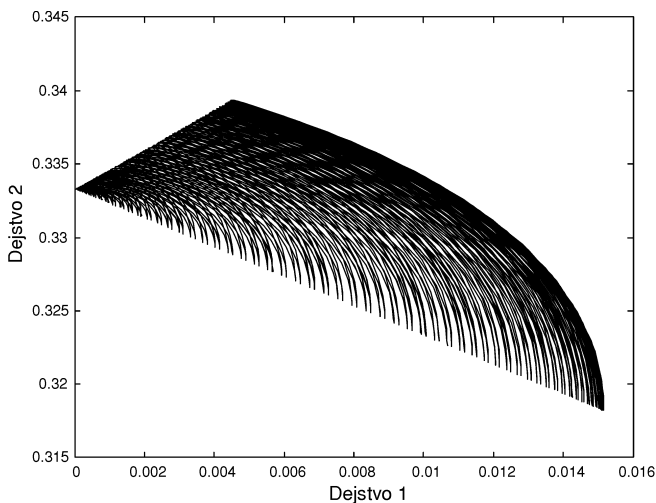
Slika 7.
Disperzija ansambla u zavisnosti od vremena u eksponencijalnom režimu. Ne postoji uočljiv trend rasta – hamiltonijan broj 1.

Figure 7.
Time evolution of the dispersion of objects in the ensemble in the exponential regime. There is no apparent increase – Hamiltonian No. 1.



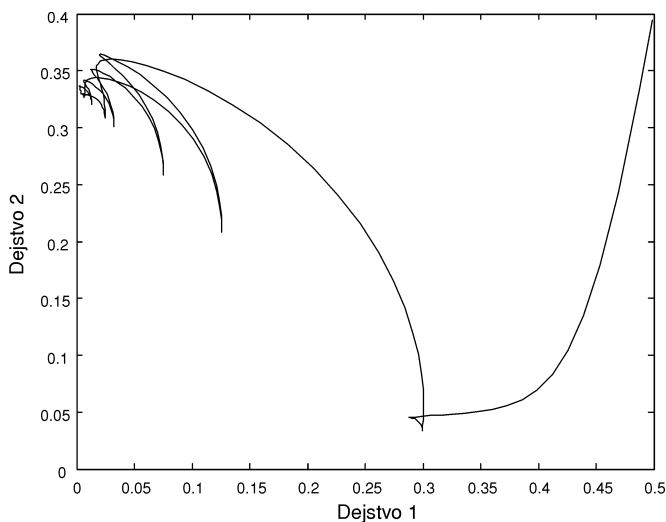
Slika 8.
Disperzija ansambla u zavisnosti od vremena u stepenom režimu. Rast je uočljiv. Obratiti pažnju na povećanje skale na ordinati za ceo red veličine u odnosu na sliku 7.

Figure 8.
Time evolution of the dispersion of objects in the ensemble in the power-law regime. An increase is clearly visible. Also notice an order of magnitude change of scale on the ordinate axis, in comparison with Figure 7.



Slika 9.
Tipična trajektorija u faznom prostoru, u eksponencijalnom režimu. Vidljiva je složena, fraktalna struktura – hamiltonijan broj 9.

Figure 9.
A typical trajectory in the phase space in the exponential regime. A complicated, fractal structure is clearly visible – Hamiltonian No. 9.



Slika 10.

Tipična trajektorija u faznom prostoru, u stepenom režimu, za isti hamiltonijan kao na slici 9. Struktura više nije fraktalna.

Figure 10.

A typical trajectory in the phase space in the power-law regime, for the same Hamiltonian as in Figure 9. The structure is not fractal anymore.

Rezultati numeričkih testova relacija skaliranja vremena bekstva i Ljapunovljevih vremena dati su u tabeli 1. Eksponenti su, u skladu sa očekivanjima, univerzalni za dati sistem, sa izuzetkom nekih posebno nestabilnih rezonanci niskog reda. Međutim, pojavljuje se kratak međurežim, koji nije mogao biti opisan teorijskim modelom.

Na slikama 1 i 2 dati su tipični izgledi grafika za eksponencijalni i stepeni režim. Grafici su linearizovani, radi lakše procene slaganja sa teorijski predviđenom relacijom. Prikazani su i fitovi dobijeni metodom najmanjih kvadrata.

Na slici 3 dat je prikaz celog intervala vrednosti u logaritamskoj skali. Na slikama 4 i 5 data je evolucija verovatnoće sa vremenom. Na prvoj slici vidi se da, sa izuzetkom prvih bekstava, verovatnoća izvesno vreme ima približno konstantnu vrednost. Druga slika daje istu zavisnost u logaritamskoj skali, radi boljeg sagledavanja stepenog rasta za manje populacije. Na slici 6 vidi se približno eksponencijalno opadanje brzine bekstva.

Evolucija disperzije sa vremenom data je na slikama 7 i 8, na kraju eksponencijalnog i na početku stepenog režima. Sasvim različito ponašanje ukazuje da se ovaj rezultat može primeniti za numeričko određivanje režima u kome se sistem nalazi.

Konačno, bilo je interesantno proučiti i karakteristike trajektorija u prostoru dejstva u zavisnosti od jačine perturbacije. Po jedan primer za svaki režim dat je na slikama 9 i 10. U prvom slučaju, trajektorija ima fraktalne osobine (što je i potvrđeno računanjem fraktalne dimenzije: $d \approx 1.32$), a što se može pripisati dominantnoj ulozi kantorusa, ostrva stabilnosti i Arnoldove mreže (za primer je uzet trodimenzioni hamiltonijan). U stepenom režimu samoslična struktura je uništena, a trajektorija zahvata znatno veći region faznog prostora.

Zaključak

Opisana su predviđanja vezana za skaliranje parametara transporta, dobijena iz novog kinetičkog modela transporta u hamiltonijanskim sistemima. Suštinski uzrok njihovog postojanja i univerzalnosti je kompeticija različitih mehanizama transporta, koji na globalnoj skali dovode do univerzalnih rezultata. Oblik relacija skaliranja ne zavisi ni od broja dimenzija, jer broj dimenzija kvalitativno ne menja karakter transporta. Rezultati vezani za skaliranje vremenskih skala bekstva bi naročito mogli imati široku primenu u proučavanju stabilnosti asteroidnog pojasa, kao i drugih sistema u dinamičkoj astronomiji. Konstatovano je dobro slaganje sa numeričkim simulacijama, mada se pojedini posebno nestabilni regioni u njih ne uklapaju.

Literatura

- Afraimovich V., Zaslavsky G. M. 1997. *Phys. Rev.*, **E55**: 5418.
- Chirikov B. V. 1979. *Phys. Rep.*, **52**: 1.
- Denisov S., Klafter J., Urbakh M. 2002. *Phys. Rev.*, **E66**: 046217.
- Guzzo M., Knežević Z., Milani A. 2001. *Icarus*, **155**: 118.
- Herrchen M. P. 2000. PhD thesis. ETH, Zuerich.
- Kandrup H. E., Siopis C., Contopoulos G., Dvorak, R. 1999. *Chaos*, **9**: 381.
- Kandrup H. E., Sideris I. V. 2000. *Phys. Rev.*, **E57**: 2214.
- MacKay R. S., Meiss J. D., Percival I. C. 1987. *Physica*, **D27**: 1.
- Morbidelli A., Froeschle C. 1996. *CeMDA*, **63**: 27.
- Morbidelli A., Giorgilli A. 1997. *Physica*, **D86**: 514.
- Morbidelli A., Vergassola M. 1997. *J. Stat. Phys.*, **89**: 549.
- Murison M., Lecar M., Franklin F. 1992. *AJ*, **104**: 1230.
- Murison M., Lecar M., Franklin F. 1994. *AJ*, **106**: 2323.
- Tzenov S. 2001. arXiv: physics/0107065.
- Varvoglis H., Anastasiadis A. 1996. *AJ*, **111**: 1718.
- Zaslavsky G. M. 2002a. *Phys. Rep.*, **371**: 461.
- Zaslavsky G. M. 2002b. *Physica*, **D168-9**: 292.

Universality and Scaling of Chaotic Transport in Perturbed Hamiltonian Systems: Kinetic Model and Numerical Simulations

A new kinetic model of transport in perturbed autonomous Hamiltonian systems is described. The starting points for the construction of kinetic equations are the topology and geometry of the phase space as described by the KAM theory. A particular generalization of the Fokker-Planck diffusion equation is used, the fractional kinetic equation, which allows the values of the transport exponents to be non-integer, thus making it possible to kinetically describe the transport in complicated, self-similar and occasionally very non-uniform structures of the phase space. The concept of building blocks is introduced, in which a kinetic equation is constructed for each of the four relevant mechanisms of transport: resonant stochastic layers, cantori, hierarchies of stability islands and Arnold web (the last one being relevant only for systems with three or more degrees of freedom). After solving the kinetic equations for each of the building blocks, convolution over all possible combinations of the blocks in a given system is performed in order to obtain the asymptotic expressions for the momenta of the actions.

From these results, scaling relations for some transport parameters are derived. The relations are expected to be universal in the phase space of a given Hamiltonian, but no universality should be expected among different Hamiltonians. The central scaling result is that the dependence of the escape time on the perturbation strength (a positive non-dimensional parameter) arises in two different forms: the exponential law (for weaker perturbations) and the power law (for stronger perturbations). The regimes of scaling are separated by a critical value of the perturbation strength. The power-law scaling of the Lyapunov exponent with the perturbation strength is also predicted. As for the escape probability, one can expect an approximately constant value over a long time interval, which gives rise to the exponential decrease of the escape rate.

Finally, some numerical simulations were performed in order to check the predicted scaling laws. For different initial conditions, ensembles of objects were integrated for nine different Hamiltonians. A neat scaling behavior is, indeed, found in most cases. For the escape times the two regimes of scaling are also detected but they are usually separated by a short intermediate regime, in which no scaling was detected.

