

# Analiza stabilnosti rotirajućih haloa ultra-lake aksionske tamne materije

---

*Jedan od modela tamne materije je ultra laka aksionska (ULA) tamna materija koju čine čestice mase  $\sim 10^{-22}$  eV/c<sup>2</sup> odn. de Brojeve talasne dužine reda 1 kpc. Zbog ovako male mase i velike talasne dužine, ona ispoljava kvantno-mehaničke efekte na galaktičkim skalama, koji utiču na formiranje proto-struktura poput haloa, palačinki i filamenata. U analizi stabilnosti struktura koju su izneli Dežak i saradnici (2018) zanemarujući uticaj rotacije pokazano je da privlačna samointerakcija čestica, često zanemarivana, daje kritičnu masu iznad koje halo i nisu stabilni. U ovom radu ta analiza je proširena uključivanjem uticaja rotacije. Minimizacijom efektivne potencijalne energije haloa dobijen je izraz za kritičnu masu u zavisnosti od ugaonog momenta haloa, mase čestice i jačine interakcije. U svhu procenjivanja ugaonog momenta, koristili smo kosmološku perturbativnu teoriju u linearnom režimu. Nakon završetka linearne faze evolucije kosmoloških fluktuacija nema razmene materije između regiona od kog nastaje halo sa susednim regionima, jer posmatrani region tada počinje da kolapsira u halo. Stoga se moment impulsa u početnoj fazi nelinearnog režima ne menja znatno. Pokazano je da ugaoni moment igra dominantnu ulogu u stabilizaciji haloa na određenim intervalima masa haloa, u zavisnosti od mase ULA čestice.*

---

## Uvod

Priroda tamne materije je već dugo među centralnim temama istraživanja astronoma i fizičara. Ideja tamne materije nastala je kao moguće objašnjenje za oblik rotacionih krivih galaksija, brzine kretanja galaksija unutar jata, gravitacionih sočiva na mestima gde nema dovoljno vidljive materije (Carroll i Ostlie 2017)... Kandidatati za čestice tamne materije su, osim brojnim astrofizičkim i kosmološkim posmatranjima, ograničeni uslovom da imaju motivaciju iz čistične fizike. Model tamne materije koji je trenutno prihvaćen kao standardan jeste tzv „hladna tamna materija” (CDM – cold dark matter). Epitet „hladna“ odnosi se na malu disperziju

---

*Nikola Savić (1999),  
Beograd, Ugrinovački  
put 10, učenik 4.  
razreda Matematičke  
gimnazije u Beogradu*

*Luka Jevtović (1999),  
Beograd, Kestenova  
6/9, učenik 4. razreda  
Trinaeste beogradske  
gimnazije*

*MENTORI:*

*Mateja Bošković,  
Istraživačka Stanica  
Petnica*

*Vladan Đukić, student  
Fizičkog fakulteta  
Univerziteta u  
Beogradu*

brzine, do  $10^{-7}c$  u odsustvu formiranih struktura (Armendariz-Picon i Neelakanta 2014). Glavna karakteristika čestica-konstituenata ovog modela je zanemarljiva ili nepostojeća elektromagnetna interakcija.

Potencijalni konstituenti koji se uklapaju u ovaj model mogu se podeliti u tri velike grupe. Prva grupa su WIMP-ovi (weakly interacting massive particles) – veoma masivne čestice veoma male disperzije brzina, motivisane supersimetričnom ekstenzijom Standardnog modela. Druga grupa su podgrupa aksioni i druge čestice nalik aksionima, koje dele karakteristične osobine da imaju relativno male mase i disperzije brzine. Među aksionima, kao kandidati za CDM, najčešće su razmatrani QCD aksioni koji se pojavljuju kao rešenje jakog CP problema u okviru Standardnog modela (Hui *et al.* 2017). Treću grupu čine primordijalne crne rupe (Biney i Tremaine 2011).

Međutim, CDM model, iako u većini aspekata precizno opisuje strukture u univerzumu, nailazi na probleme na manjim skalama (Popollo i Delliou 2017). Ovo je motivisalo formiranje alternativnih modela tamne materije, čiji bi konstituenti bili drugačije čestice od onih koje se uklapaju u CDM. Jedan od takvih modela jeste model tamne materije u kome čestice-konstituenti imaju de Brojeve talasne dužine reda veličine dimenzija tamnih haloa. Ovakav model naziva se „razmrljana tamna materija” (FDM-fuzzy dark matter). Jedan od kandidata za FDM su ultra-laki aksioni (ULA), za čije postojanje postoji motivacija u okviru teorije struna (Marsh 2016; Hui *et al.* 2017). U pitanju su realni pseudoskalari, odnosno bozonske čestice nultog spina opisane sa dva parametra, masom  $m$  reda veličine  $10^{-22}$  eV/ $c^2$  i jačinom samointerakcije čestica  $\lambda$ . Ovako mala masa, koja ima za posledicu de Brojevu talasnu dužinu reda 1 kpc, ukazuje na mogućnost da ovakva tamna materija može ispoljavati kvantne efekte na skalama galaksija koji bi uticali na njihovo formiranje i strukturu (Hui *et al.* 2017).

Pomenuti kvantni efekti, koji prave razliku u predviđanjima o formiranju struktura u odnosu na CDM, omogućavaju da se ograniče parametri modela ovakve tamne materije, poput mase čestice  $m$  i jačine samointerakcije  $\lambda$ . Prve strukture su nastale ubrzo nakon početka ere dominacije materije (na crvenom pomaku  $z = 3400$ ), kada je omogućen rast fluktuacija gustine tamne materije. Barionska materija je tada i dalje bila u jakoj interakciji sa svetlošću, pa njene fluktuacije gustine nisu mogle da rastu. Tek nakon što je temperatura dovoljno opala da se barionska materija dekupluje od zračenja ( $z = 1100$ ), njene fluktuacije bivaju privučene gravitacionim poljem većih zgušnjenja tamne materije. Dalje su zgušnjenja usled delovanja gravitacije postojala sve veća, dok nisu nastale prve strukture: halo, palačinke i filamenti. Sudaranjem ovih haloa nastali su halo galaksija. Raspodela amplituda fluktuacija na različitim skalama dobijena iz posmatranja se odlično slaže sa ovim opisom formiranja struktura (Biney i Tremaine 2011). Teorije koje ne podrazumevaju postojanje tamne materije već modifikuju gravitaciju, poput MOND-a (Modified Newtonian Dynamics), imaju velikih problema u objašnjavanju izgleda spektra snage materije (Dodelson 2011), što predstavlja jak argument u korist postojanja tamne materije naspram modifikovanja gravitacije. Osim toga, u okviru teorije

relativnosti, da nije bilo tamne materije, strukture bi se formirale značajno kasnije nego što posmatranja ukazuju.

U radu Desjacques *et al.* (2018) ispitana je stabilnost prvih kosmoloških struktura u okviru ultra-lake aksionske tamne materije u zavisnosti od jačine samointerakcije. Analiza stabilnosti je urađena minimizacijom energije proto-haloa, gde je uračunata gravitaciona energija, energija kvantnog pritiska i energija samointerakcije čestica. Autori pominju i energetski doprinos usled rotacionog kretanja, koji zavisi od ugaonog momenta strukture, ali ga zanemaruju u analizi. Kako kanonski potencijal podrazumeva privlačnu samointerakciju aksiona, ona zajedno sa gravitacijom, pospešuje zgušnjavanje materije. S druge strane, kvantni pritisak, o kome će više reči biti kasnije, zajedno sa rotacijom, ima suprotan efekat. Samointerakcija ULA se često zanemaruje zbog veoma male vrednosti parametra samointerakcije. Međutim, energija koju odgovara samointerakciji je srazmerna proizvodu parametra samointerakcije i zapremine faznog prostora, zbog čega samointerakcija može da ima bitnu ulogu u formiranju ULA struktura (*ibid.*).

Kvantni pritisak pojavljuje se kao makroskopska posledica kinetičke energije čestica usled neodređenosti položaja i impulsa. Oblik ovog energetskog doprinosa može se proceniti na sledeći način. Za sferno-simetrični halo radijusa  $R$ , sačinjen od ultra-lakih aksiona mase  $m$ , relacija neodređenosti nalaže da za njih važi  $\Delta p \sim \hbar / \Delta x$ . Kako je de Brojeva talasna dužina ULA reda veličine dimenzija haloa, važi  $\Delta x \sim R$ . Ako pretpostavimo da je taj halo sačinjen od  $N$  čestica, ukupna kinetička energija dobijena od kvantnog pritiska biće oblika  $E \sim N \hbar^2 / (2m^2 R^2)$ , što se može zapisati i kao  $E \sim M \hbar^2 / (2m^2 R^2)$ , gde je  $M$  masa haloa. Zaista, u ovom radu je pokazano da izraz za energetski doprinos kvantnog pritiska ima upravo ovakav oblik. Iz datog izraza vidi se da bi doprinos bio zanemarljiv za čestice uobičajenih masa za CDM model (QCD aksioni,  $10^{-6} < m$  [eV] < 1), međutim u FDM modelu, ovaj doprinos može biti nezanemarljiv, i uticati na stabilnost haloa pri formiranju.

U ovom radu je, radi procene energetskog doprinosa rotacije u analizi stabilnosti, korišćena linearna perturbativna teorija za procenu ugaonog momenta haloa po uzoru na rezultate iz Peebles (1969). Tu je pokazano da u linearnom režimu formiranja u okviru CDM-a, kada su relativne fluktuacije gustine još uvek male, dolazi do stvaranja ugaonog momenta struktura. Iako generalno ugaoni moment može da se menja kroz interakciju sa okolnom materijom (*ibid.*), za procenu njegove vrednosti uzećemo ugaoni moment koji je akumuliran za vreme linearnog režima.

Na velikim skalama perturbacije gustine, ULA u linearnom režimu se ponašaju kao perturbacije CDM. Na malim skalama dolaze do izražaja efekti samointerakcije i kvantnog pritiska, zbog čega opis perturbacija odstupa od opisa u okviru CDM (Marsh 2016). Kako je doprinos fluktuacija u stvaranju ugaonog momenta u linearnom režimu na malim skalama zanemarljiv (Peebles 1969), za procenu ugaonog momenta iskorišćen je opis linearnih perturbacija za CDM. Pomoću procenjenog ugaonog momenta korigovana je analiza stabilnosti opisana kod (Desjacques *et al.* 2018).

Pokazano je da ovako procenjen ugaoni moment ima nezanemarljiv uticaj na stabilnost ULA haloa.

U kosmologiji i teorijskoj fizici uopšte, često je praktičnije koristiti tzv. prirodne jedinice, koje dobijamo postavljanjem vrednosti fundamentalnih konstanti na 1 ( $c = \hbar = k_B = 1$ ). Tada se korišćenjem relacija poput  $E = mc^2$  ( $E = m$  u prirodnim jedinicama), masa, dužina, vreme i druge jedinice mogu izraziti pomoću jedinice energije. Ukoliko želimo da iz izraza u prirodnim jedinicama dobijemo izraz u SI jedinicama, dovoljno je znati koje su SI jedinice veličina koje figurišu u izrazu, koje se mogu jedinstveno dobiti uvrštavanjem odgovarajućih stepena  $c$ ,  $\hbar$ ,  $k_B$ . U ovom radu ćemo koristiti SI jedinice, osim u izražavanju mase i konstanti samointerakcije ULA, čije su tipične vrednosti redom  $m \sim 10^{-22} \text{ eV}/c^2$  i  $\lambda \sim 10^{-96} \hbar/c^3$  (*ibid.*), gde smo konstante  $c$  i  $\hbar$  zapisali da bi mogle da se vide SI jedinice ovih veličina, i ubuduće ih nećemo zapisivati.

U odeljku 2 prikazan je hidrodinamički opis ULA kao tamne materije, koji je iskorišćena u odeljku 3 gde je opisana procena ugaonog momenta haloa. Posle toga, u odeljku 4 je data analiza stabilnosti haloa uz rotacioni član kinetičke energije. Na kraju, u odeljku 5 diskutujemo rezultate i moguće pravce u kojima se može nastaviti istraživanje.

## Hidrodinamički opis ULA

U ovom odeljku je prvo dat opis polja ULA u univerzumu koji se ne širi, u Njutnovskom limesu. Nakon toga sledi osnovni opis homogenog Svemira u eri dominacije materije. Na kraju se korišćenjem rezultata iz prva dva pododeljaka daje opis nehomogenosti iz kojih su nastale strukture. Ovaj opis postignut je perturbovanjem jednačina koje opisuju polje ULA u širećem Svemiru oko rešenja za homogen i izotropan svemir i zadržavanjem na linearnim korekcijama.

### Opis ULA u Njutnovskom limesu

Klasičan opis ULA skalarnog polja  $\phi$  dat je Klajn-Gordonovom jednačinom (KGE). Za slaba gravitaciona polja KGE ima sledeći oblik (Banik *et al.* 2015):

$$(\partial_t^2 - c^2 \nabla^2) \phi + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \phi + \frac{\lambda}{3!} \phi^3 - \left( \frac{2}{c^2} \Phi \partial_t^2 + \nabla \Phi \cdot \nabla + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi \partial_t \right) \phi = 0 \quad (1)$$

gde je  $\Phi$  gravitaciono polje koje zadovoljava Poasonovu jednačinu:

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho \quad (2)$$

Član  $\frac{\lambda}{3!} \phi^3$  predstavlja dominantan doprinos samointerakcije ULA. Za

nerelativističke brzine i stacionarno gravitaciono polje, KGE se svodi na Gros-Pitaevski jednačinu (GPE) (Banik *et al.* 2015):

$$i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + \left(m\Phi - \frac{\hbar^4\lambda}{8m^2c^4}|\psi|^2\right)\psi \quad (3)$$

gde je  $\psi$  kompleksna funkcija koja opisuje polje aksiona. Iako je naš opis polja klasičan, zbog oblika jednačine 3, po analogiji sa kvantnom mehanikom,  $\psi$  nazivamo talasnom funkcijom. Izražavanjem talasne funkcije u Ojlerovom obliku  $\psi = \sqrt{\frac{\rho}{m}} e^{i\theta}$  i definisanjem brzine  $v = \frac{\hbar}{m}\nabla\theta$  (Desjacques *et al.* 2018) realni i imaginarni deo GPE daju po jednu jednačinu:

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (4)$$

$$\dot{\vec{v}} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + \nabla(Q + \Phi + h) = 0 \quad (5)$$

Jednačina 4 je jednačina kontinuiteta a jednačina 5 je Ojlerova jednačina dinamike fluida. Drugi član u jednačini 5 daje promenu brzine fluida usled zavisnosti od položaja. Veličina:

$$h = -\frac{\hbar^4\lambda}{8m^4c^4}\rho \quad (6)$$

je entalpija po jedinici mase, dok je:

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m^2}\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \quad (7)$$

kvantni pritisak. Jednačina 5 određuje kretanje fluida pod dejstvom gravitacione sile, kvantnog pritiska i pritiska koji potiče od samointerakcije (član  $\nabla h$ ), a jednačina 4, koja ukazuje da je količina fluida lokalno održana, daje vezu između gustine i brzine fluida.

Dakle, za slaba, stacionarna gravitaciona polja i brzine mnogo manje od brzine svetlosti, ULA se može opisati zatvorenim sistemom jednačina koji čine Poasonova, Ojlerova i jednačina kontinuiteta.

## Homogeni Svemir

Na velikim skalama, Svemir je homogen i izotropan. Osim toga, Svemir se širi, tako da se između svake dve tačke u prostoru udaljenost vremenom povećava (Biney i Tremaine 2011). Udaljenost između dve tačke možemo zapisati preko tzv. „usputnih koordinata” (eng. comoving coordinates):

$$\vec{r}(t) = a(t)\vec{r}_0 \quad (8)$$

gde je  $\vec{r}_0$  usputna udaljenost, a  $a(t)$  faktor skaliranja, koji daje opis rasta udaljenosti u skladu sa načinom na koji se Svemir širi. Zavisnost faktora skaliranja od vremena daje (prva) Fridmanova jednačina:

$$H^2 = \frac{8\pi G \rho(t)}{3} - \frac{Kc^2}{a^2} \quad (9)$$

pri čemu je  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  Hablov parametar, a parametar  $K$  opisuje prostornu zakrivljenost Svemira. Za  $K$  koje je veće, manje ili jednako nuli odgovaraju zatvoren (hipersferičan), otvoren (hiperboličan) i ravan (euklidski) Svemir, respektivno. Dosadašnja ispitivanja su konzistentna sa  $K = 0$  u granicama greške (Biney i Tremaine 2011), pa u ostatku rada koristimo  $K = 0$ . Fridmanova jednačina sledi iz Ajnštajnovih jednačina polja i uslova homogenosti i izotropnosti Svemira. Međutim, napomenimo da se ona u slučaju  $K = 0$  može izvesti i u Njutnovskoj mehanici razmatrajući kretanje sferne ljuske materije pod dejstvom gravitacije homogenog Svemira.

Gustine različitih komponenti različito zavise od faktora skaliranja. Stoga, dominantna komponenta u sastavu Svemira određuje zavisnost faktora skaliranja od vremena. Iz jednačine kontinuiteta sledi da se u eri dominacije materije gustina skalirala kao  $a^{-3}$ . Tada rešavanje Fridmanove jednačine daje:

$$a(t) = a_0 t^{2/3} \quad (10)$$

odnosno:

$$\rho(t) = \frac{1}{6\pi G t^2} \quad (11)$$

gde je faktor skaliranja normalizovan tako da je  $a(t_d) = 1$ , pri čemu je  $t_d$  starost Svemira.

## Nehomogen Svemir

U ovom odeljku dat je opis nehomogenosti iz kojih nastaju strukture. Za razvijanje tog opisa koristićemo rezultate iz prethodna dva odeljka.

Sistem jednačina (2), (4) i (5) dobijen je u slučaju statičnog prostora. Radi uračunavanja efekta širenja Svemira, prelazimo u usputne koordinate transformacijama:

$$\vec{r}(t) = a(t) \vec{x}(t), \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_r = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_x - H \vec{x} \cdot \nabla_x, \quad \nabla = \frac{1}{a} \nabla_x \quad (12)$$

Korišćenjem ovih transformacija dobija se sledeći sistem:

$$\dot{\rho} - H \vec{x} \cdot \nabla_x \rho + \frac{1}{a} \nabla_x \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (13)$$

$$\dot{\vec{v}} - H \vec{x} \cdot \nabla_x \vec{v} + \frac{1}{a} \nabla_x \cdot \left( \frac{1}{a^2} \mathcal{Q} + \Phi + h \right) = 0 \quad (14)$$

$$\Delta_x \Phi = 4\pi G \rho a^2 \quad (15)$$

Jednačine (13)–(15) daju opšti opis skalarnog fluida u širećem prostor-vremenu. U slučaju homogenog i izotropnog Svemira, fizičke

veliĉine u ovom sistemu zavise samo od vremena, pa je jednostavno rešiti ga. Stoga se rešavanju ovog sistema pristupa perturbativno, tako što se rešenje traži u obliku:

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho_0(t)(1 + \delta(\vec{x}, t)) \quad (16)$$

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = Ha\vec{x} + \vec{u}(\vec{x}, t) \quad (17)$$

$$\Phi(\vec{x}, t) = \Phi_0(t)(1 + \delta\Phi(\vec{x}, t)) \quad (18)$$

gde veliĉine  $\delta$ ,  $\vec{u}$  i  $\delta\Phi$ , koje nazivamo perturbacije, opisuju odstupanja od homogenog i izotropnog Svemira opisanim gustinom  $\rho_0(t)$ , brzinom  $Ha\vec{x}$  i gravitacionim poljem  $\Phi_0(t)$ . Veliĉina  $\delta(\vec{x}, t)$  naziva se kontrast gustine.

Implementiranjem ovih perturbacija u sistem (13)–(15) i korišćenjem veza između veliĉina u slučaju sasvim homogenog Svemira dobija se sistem jednaĉina po  $\delta$ ,  $\vec{u}$  i  $\delta\Phi$ . Taj sistem jednaĉina nije analitiĉki rešiv.

Međutim, ukoliko su perturbacije dovoljno male, tj. važi  $\left| \frac{\delta\Phi(\vec{x}, t)}{\Phi(t)} \right| \ll 1$ ,

$\left| \frac{\vec{u}(\vec{x}, t)}{Ha\vec{x}} \right| \ll 1$  i  $|\delta(\vec{x}, t)| \ll 1$ , može se znaĉajno pojednostaviti:

$$\dot{\delta}_1 + \frac{1}{a} \vec{\nabla}_x \cdot \vec{u}_1 = 0 \quad (19)$$

$$\ddot{\vec{u}}_1 + H\dot{\vec{u}}_1 - \frac{1}{a^3} \frac{\hbar^2}{4m^2} \nabla_x^3 \delta_1 - \frac{1}{a} \frac{\hbar^4 \lambda}{8m^4 c^4} \rho_0 \nabla_x \delta_1 + \frac{1}{a} \nabla_x \delta\Phi_1 = 0 \quad (20)$$

$$\Delta_x \delta\Phi_1 = 4\pi G \rho_0 a^2 \delta_1 \quad (21)$$

pri ĉemu je na perturbacije dodat indeks 1, koji ukazuje da zanemarujemo ĉlanove koji sadrže proizvode perturbacija, tj. da razmatramo linearnu korekciju u odnosu na homogen Svemir. Korišćenjem sistema (19)–(21) (delovanjem gradijenta na (20) zatim izražavanjem  $\nabla_x \cdot \vec{u}_1$  iz (19) i  $\Delta_x \delta\Phi_1$  iz (21)) dobija se jednaĉina:

$$\ddot{\delta}_1 + 2H\dot{\delta}_1 + \frac{\hbar^2}{4a^4 m^2} \Delta_x^2 \delta_1 + \frac{\rho_0 \hbar^4 \lambda}{8a^2 m^4 c^4} \Delta_x \delta_1 - 4\pi G \rho_0 \delta_1 = 0 \quad (22)$$

Prelaskom u Furijeov prostor  $\delta_1(\vec{x}, t)$  se može izraziti kao:

$$\delta_1(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}} \delta_{1,k}(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

gde je  $\vec{k}$  talasni vektor. Napominjemo da pod sumama po  $\vec{k}$  podrazumevamo integral  $\int d^3\vec{k}$  gde je domen integracije realan prostor  $\mathbb{R}^3$ . Primenom ove transformacije, jednaĉina (22) postaje:

$$\ddot{\delta}_{1,k} + 2H\dot{\delta}_{1,k} + \left( \frac{\hbar^2 k^4}{4m^2 a^4} - \frac{\rho_0 \hbar^4 \lambda k^2}{8a^2 m^4 c^4} - 4\pi G \rho_0 \right) \delta_{1,k} = 0 \quad (23)$$

Jednaĉina (23) ima oblik jednaĉine prigušenih oscilacija. Njen drugi ĉlan se može interpretirati kao trenje, gde širenje Svemira efektivno

usporava rast fluktuacija gustine. Prvi član u zagradi predstavlja doprinos kvantnog pritiska koji teži da smanji fluktuacije. Drugi član u zagradi potiče od samointerakcije čestica koja je privlačna pa i on, kao i treći (u zagradi), gravitacioni član, pospešuje rast fluktuacija. Iako je izvođenje jednačine (23) dato u Njutnovskom limesu, ispostavlja se da jednačina (23) daje opis fluktuacija koji se slaže sa opisom iz opšte relativnosti i na skalama većim od horizonta (Binney i Tremaine 2011).

Uticaj samointerakcije i kvantnog pritiska su srazmerni sa  $k^{-2}$  i  $k^{-4}$  redom, tj. zavise od skale. Na osnovu jednačine (23) i očekivanih vrednosti za masu i samointerakciju ULA, može se pokazati da su samointerakcija aksiona i kvantni pritisak zanemarljivi u linearnom režimu osim na veoma malim skalama (Desjacques *et al.* 2018). Tada rešavanje jednačine (23) za eru dominacije materije daje:

$$\delta_{1,k} = A_k \left( \frac{t}{t_{\text{eq}}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (24)$$

pri čemu je rešenje u kome se perturbacije gustine smanjuju zanemareno.  $A_k$  predstavlja konstantu koja nam govori o amplitudi fluktuacije. Kako je  $\delta_1$  nasumična promenljiva, korisne informacije o fluktuacijama su nam njihova srednja vrednost i varijansa. Iz kosmološkog principa očekujemo da je srednja vrednost  $\langle \delta_{1,k} \rangle = 0$ . Ukoliko nas zanima karakteristična amplituda fluktuacija možemo naći varijansu  $\langle \delta_{1,k} \delta_{1,k} \rangle = P(k)$ . Ova veličina naziva se (linearni) spektar snage materije jer nam govori o intenzitetu linearnih fluktuacija materije na različitim skalama (Binney i Tremaine 2011). Vidimo da se u izrazu za spektar snage izdvajaju faktor  $\langle A_k A_k \rangle$  koji govori o raspodeli amplituda fluktuacija po talasnim brojevima i faktor  $t^{4/3}$  koji daje vremensku zavisnost ovih amplituda. Odatle sledi da spektar snage nije menjao oblik tokom ere dominacije materije, i da se skalirao sa  $t^{4/3}$ . Kako u eri dominacije tamne energije prestaje rast linearnih fluktuacija, normalizovali smo  $A_k$  tako da  $\langle A_k A_k \rangle$  predstavlja spektar snage u trenutku  $t_{\text{eq}} \sim 10$  Gyrs kada su gustina materije i tamne energije bile jednake. Ova normalizacija nam govori da je  $\langle A_k A_k \rangle$  i trenutni spektar snage linearnih fluktuacija.

Koristeći izraz za  $\delta_{1,k}$ , jednačinu (19) možemo rešiti po perturbaciji brzine prelaskom u Furijeov prostor:

$$\bar{u}_{1,\vec{k}} = \frac{2}{3} i a t^{\frac{1}{3}} t_{\text{eq}}^{-\frac{4}{3}} \frac{\vec{k}}{k^2} A_k \quad (25)$$

pri čemu je  $\bar{u}_1(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}} \bar{u}_{1,k}(t) e^{i\vec{k}\vec{x}}$ . Kako smo pri rešavanju sistema (19)–(21) zanemarili samointerakciju i kvantni pritisak, ovi rezultati važe za CDM.



## Ugaoni moment

U ovom odeljku procenjuje se ugaoni moment proto-haloa koji nastaje u linearnom režimu na osnovu rezultata u prethodnim odeljcima. Posmatramo, jednostavnosti radi, sferno simetrični region koji je gušći u odnosu na pozadinu. Vremenom će taj region da se širi dok gravitacija materije unutar regiona ne nadvlada širenje i započne kolaps. Kolaps ne vodi u singularnost, već do virijalizacije haloa (Biney i Tremaine 2011).

U ostatku rada podrazumevamo da su operatori definisani u usputnim koordinatama tj.  $\nabla_{\vec{x}} \equiv \nabla$  i sl. osim ako nije drugačije napomenuto. U ovom odeljku pratimo formalizam razvijen u Peebles (1969) i prikazan u Harada *et al.* (2017).

Ugaoni moment regiona čija je zapremina u usputnim koordinatama  $V$  u odnosu na koordinatni početak je:

$$\vec{L}_c = \int_{a^3V} \rho \vec{r} \times \vec{v} d^3\vec{r} = \rho_0 a^4 \left( \int_V \vec{x} \times \vec{u} d^3\vec{x} + \int_V \vec{x} \delta \times \vec{u} d^3\vec{x} \right) \quad (26)$$

Ako je  $V$  lopta sa centrom u koordinatnom početku, izraz se može pojednostaviti. Po definiciji toka je  $v \propto \nabla\theta$ . Takođe, Hablov tok  $H\vec{x}$  može se zapisati kao gradijent nekog skalarnog polja. Stoga i za perturbaciju  $\vec{u}$ , definisanu kao  $\vec{v} - H\vec{x}$  važi da postoji  $\phi$  takvo da je  $\vec{u} = \nabla\phi$ . Korišćenjem Gausove teoreme i identiteta  $\nabla \times \vec{x} = 0$  dobija se:

$$\begin{aligned} \left[ \int_V \vec{x} \times \nabla\phi d^3\vec{x} \right]_i &= \left[ \int_V \nabla \times (\vec{x} \phi) d^3\vec{x} \right]_i = - \left[ \int_{\partial V} (\vec{x} \phi) \times d\vec{S} \right]_i = \\ &= - \int_{\partial V} \varepsilon_{ijk} x_j \phi dS_k \end{aligned} \quad (27)$$

gde je simbol Levi-Čivita  $\varepsilon_{ijk}$  jednak 1 za parne, a  $-1$  za neparne permutacije indeksa  $(i, j, k)$ . U jednačini 27, kao i u ostatku rada, usvojena je Ajnštajnova sumaciona konvencija. Kako je  $\varepsilon_{ijk}$  antisimetričan pri zameni mesta indeksa, a  $x_j dS_k$  su simetrični pri istoj zameni, zbog toga što je  $\partial V$  sfera, važi:

$$\left[ \int_V \vec{x} \times \vec{u} d^3\vec{x} \right]_i = \int_{\partial V} \varepsilon_{ijk} \phi x_j dS_k = 0 \quad (28)$$

Fluktuacije u gustini nisu sferno simetrične, pa se centar mase neće poklapati sa koordinatnim početkom. Ugaoni moment u odnosu na centar mase se može dobiti kao:

$$\vec{L} = \vec{L}_c - \vec{R} \times \vec{P} \quad (29)$$

gde je  $\vec{R}$  vektor položaja centra mase a  $\vec{P}$  ukupan impuls. Oni se mogu proceniti kao:

$$\vec{R} = \frac{\int_{a^3V} \rho \vec{r} d^3\vec{r}}{\int_{a^3V} \rho d^3r} = \frac{a}{V} \int_V \vec{x} \delta_1 d^3\vec{x} \quad (30)$$

$$\vec{P} = \int_{a^3V} \rho_0 \vec{v} d^3\vec{r} = \rho_0 a^3 \int_V \vec{u}_1 d^3\vec{x} + \rho_0 a^3 V H \vec{R} \quad (31)$$

Dalje,  $\delta_1$  i  $\vec{u}_1$  mogu se izraziti u Furijeovom prostoru. Kako je u proceni ugaonog momenta adekvatno zanemariti uticaj kvantnog pritiska i samointerakcije, za opis evolucije fluktuacija koristićemo rezultate koji važe za CDM, tj. (24) i (25). Tada se integrali u (30) i (31) svode na:

$$\int_{|\vec{x}| \leq r_0} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3x = \frac{4\pi}{3} r_0^3 g(kr_0) \quad (32)$$

$$\int_{|\vec{x}| \leq r_0} \vec{x} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3\vec{x} = i \frac{4\pi}{15} r_0^5 f(kr_0) \vec{k} \quad (33)$$

pri čemu su u rešenju ovih integrala funkcije  $f$  i  $g$  definisane kao:

$$g(y) = 3 \left( \frac{\sin y}{y^3} - \frac{\cos y}{y^2} \right) \quad (34)$$

$$f(y) = 45 \left( \frac{\sin y}{y^5} - \frac{\cos y}{y^4} - \frac{\sin y}{3y^3} \right) \quad (35)$$

Korišćenjem jednačina (32) i (33) u (26), (30) i (31) dolazi se do:

$$\vec{R} = \frac{i}{5} a \left( \frac{t}{t_{\text{eq}}} \right)^{\frac{2}{3}} r_0^2 \sum_{\vec{k}} f(kr_0) A_{\vec{k}} \vec{k} \quad (36)$$

$$\vec{P} = \frac{8\pi}{9} i \rho_0 a^4 t^{-\frac{1}{3}} t_{\text{eq}}^{-\frac{2}{3}} r_0^3 \sum_{\vec{k}} g(kr_0) A_{\vec{k}} \frac{\vec{k}}{k^2} + \frac{4\pi}{3} \rho_0 a^3 r_0^3 H \vec{R} \quad (37)$$

$$\vec{L}_c = -\frac{8\pi}{45} \rho_0 (ar_0)^5 t^{\frac{1}{3}} t_{\text{eq}}^{-\frac{4}{3}} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} A_{\vec{k}} A_{\vec{k}'} \frac{\vec{k} \times \vec{k}'}{k'^2} f(|\vec{k} + \vec{k}'|r_0) \quad (38)$$

Korišćenje sistema (36)–(38) u jednačini (29) daje:

$$\vec{L} = -\frac{8\pi}{45} \rho_0 (ar_0)^5 t^{\frac{1}{3}} t_{\text{eq}}^{-\frac{4}{3}} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} A_{\vec{k}} A_{\vec{k}'} \frac{\vec{k} \times \vec{k}'}{k'^2} \left[ f(|\vec{k} + \vec{k}'|r_0) - f(kr_0) g(k'r_0) \right] \quad (39)$$

Pod pretpostavkom da  $A_{\vec{k}}$  ima nasumičnu fazu, može se izračunati varijansa ugaonog momenta, i to kao:

$$\langle \vec{L}^2 \rangle = \left( \frac{8\pi}{45} \rho_0 (ar_0)^5 t^{\frac{1}{3}} t_{\text{eq}}^{-\frac{4}{3}} \right)^2 \times \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} P(\vec{k}_1) P(\vec{k}_2) (\vec{k}_1 \times \vec{k}_2)^2 Q_2(Q_2 - Q_1) \quad (40)$$

gde je

$$Q_1 = \frac{f_{1+2} - f_2 g_1}{k_1^2}, \text{ a } Q_2 = \frac{f_{1+2} - f_1 g_2}{k_2^2}$$

pri čemu je  $f_{1+2} = f(|\vec{k}_1 + \vec{k}_2| r_0)$ , a  $f_i = f(k_i r_0)$ ,  $g_i = g(k_i r_0)$  za  $i = (1, 2)$ . Perturbacije gustine prvog reda mogu se integraliti po zapremini lopte radijusa  $r_0$  kao:

$$\delta_s = \frac{\int_{a^3 V} d^3 \vec{r} \rho - \int_{a^3 V} d^3 \vec{r} \rho_0}{\int_{a^3 V} d^3 \vec{r} \rho_0} = \frac{3}{4\pi r_0^3} \int_{|\vec{x}| < r_0} d^3 \vec{x} \delta = \left( \frac{t}{t_{\text{eq}}} \right)^{\frac{2}{3}} \sum_{\vec{k}} A_{\vec{k}} g(k_1^2 r_0) \quad (41)$$

Iz poslednjeg izraza u jednačini (41) može se izraziti varijansa  $\delta_s$  kao:

$$\langle \delta_s^2 \rangle = \left( \frac{t}{t_{\text{eq}}} \right)^{\frac{4}{3}} \sum_{\vec{k}} \langle |A_{\vec{k}}|^2 \rangle g^2(k r_0) \quad (42)$$

Uz korišćenje izraza (42), jednačina (40) se može zapisati u sledećem obliku:

$$\langle \bar{L}^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \frac{8\pi}{45} \rho_0 \frac{(ar_0)^5}{t} \mathcal{A} \langle \delta_s^2 \rangle \quad (43)$$

$$\mathcal{A}(r_0) = \frac{\left\{ \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} \langle |A_{\vec{k}_1}|^2 \rangle \langle |A_{\vec{k}_2}|^2 \rangle (\vec{k}_1 \times \vec{k}_2)^2 Q_2 (Q_2 - Q_1) \right\}^{\frac{1}{2}}}{\sum_{\vec{k}} \langle |A_{\vec{k}}|^2 \rangle g^2(k r_0)} \quad (44)$$

Primitimo da korišćenje (44) omogućava da definišemo numerički faktor  $\mathcal{A}(r_0)$  tako da ne zavisi od normalizacije spektra snage. Jednačina (43) može se prepisati pomoću mase  $M = (4\pi/3)\rho_0 (ar_0)^3$  i fizičkog radijusa  $R = ar_0$  regiona od kog nastaje halo:

$$\langle \bar{L}^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{15} \mathcal{A}(r_0) \frac{MR^2}{t} \langle \delta_s^2 \rangle \quad (45)$$

U slučaju da  $\partial V$  odstupa od sferne simetrije, funkcije  $f$  i  $g$ , kao i faktor  $\mathcal{A}(r_0)$  biće promenjeni. Međutim, jednačina (45) i dalje se može koristiti kao izraz za doprinos perturbacija drugog reda (Harada *et al.* 2017).

Kada vrednost kontrasta gustine posmatranog regiona bude takva da je  $\langle \delta_s^2 \rangle \approx 1$ , region počinje da kolapsira (Biney i Tremaine 2011). Tada više nema razmene materije između homogene pozadine i ovog regiona pa bi ugaoni moment regiona od tada trebalo da se menja zanemarljivo. Stoga ćemo ugaoni moment proceniti evaluirajući izraz (45) u trenutku kada halo počinje da kolapsira po sledećem postupku. Za zadatu masu haloa  $M$  može se odrediti  $r_0$  – korišćenjem jednačine (11) u  $M = \frac{4\pi r_0^3 \rho}{3}$  dobija se:

$$M = \frac{2}{9} \frac{r_0^3}{G t_d^2} \quad (46)$$

Na osnovu  $r_0$  se iz jednačine (42) može proceniti trenutak početka kolapsa  $t$ . Kako faktor skaliranja i srednja gustina Svemira zavise samo od vremena, na osnovu  $t$  mogu se i oni odrediti jednačinama (10) i (11) redom. Dalje, poznavajući gustinu i faktor skaliranja može se odrediti radijus kao  $R = a(t)r_0$ . Na kraju, preostaje da se numerički odredi integral  $\mathcal{S}(r_0)$  kako bi se procenio ugaoni moment pomoću 45. Na ovaj način se za svaku zadatu masu regiona, tj. budućeg proto-haloo može proceniti odgovarajući ugaoni moment.

U radu Peebles (1969) koristi se spektar snage oblika  $P(k) \sim (kr_0)^{-\beta}$ , i tada faktor  $\mathcal{S}$  ne zavisi od  $r_0$ . Ovde je, međutim korišćen spektar snage dobijen interpolacijom podataka preuzetih sa NASA-inog sajta za standardnu  $\Lambda$ CDM kosmologiju (Lewis *et al.* 2008), te nije moguće ukloniti zavisnost od  $r_0$ . Za određivanje faktora  $\mathcal{S}(r_0)$  napisan je kod u programskom jeziku Mathematica, gde su integrali određeni numeričkom funkcijom NIntegrate. Integracija po  $k$  izvršena je na intervalu od 0 do  $1000 \cdot \text{Mpc}^{-1}$ .

## Analiza stabilnosti haloo

U ovom odeljku ispitaćemo stabilnost haloo minimizacijom ukupne energije  $\mathcal{H}$ . Jednostavnosti radi, koristimo ansatz gde profil gustine haloo ima oblik (Desjacques *et al.* 2018):

$$\rho(\vec{x}, t) = \frac{M}{(2\pi)^{3/2} \bar{R}^3} e^{-\frac{r^2}{2\bar{R}^2}} \quad (47)$$

gde je  $M$  masa haloo. Ovaj oblik profila gustine ukazuje da ne postoji granica posle koje je gustina jednaka nuli, već da ona asimptotski teži nuli. Stoga  $\bar{R}$  ne određuje granicu, već predstavlja karakterističnu veličinu haloo, koju ćemo identifikovati sa njegovim radijusom.

Halo ima energetske doprinose u vidu kinetičke i potencijalne energije. U potencijalnu energiju spadaju energija kvantnog pritiska  $E_Q$ , energija samointerakcije  $U$  i gravitaciona potencijalna energija  $W$ . Kako nas interesuju stacionarni haloo, tj. oni kod kojih se  $\bar{R}$  ne menja s vremenom, u kinetičkoj energiji preostaje samo doprinos rotacije  $E_{\text{rot}}$ . Stoga se energija haloo može zapisati kao:

$$\mathcal{H} = E_{\text{rot}} + E_Q + U + W \quad (48)$$

Pri čemu se energetske doprinose mogu izračunati kao:

$$W = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{x} \rho \Phi = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} G \frac{M^2}{\bar{R}} \quad (49)$$

$$U = \frac{\hbar^4 \lambda}{16 m^4 c^4} \int d^3 \vec{x} \rho^2 = -\frac{1}{128 \pi^{3/2}} \frac{\lambda \hbar^4}{m^4 c^4} \frac{M^2}{\bar{R}^3} \quad (50)$$

$$E_Q = \frac{\hbar^2}{8m^2} \int d^3\vec{x} \frac{(\Delta\rho)^2}{\rho^2} = \frac{3}{8} \frac{\hbar^2}{m^2} \frac{M}{\bar{R}^2} \quad (51)$$

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} \rho d^2\omega \approx \frac{L^2}{I} \approx \frac{M}{\bar{R}^2} h^2 \quad (52)$$

gde je  $h = L/M$  ugaoni moment po jedinici mase.

Stabilna stanja su konfiguracije  $\bar{R}$  i  $M$  sa minimalnom energijom, stoga za njih važi  $\partial\mathcal{H}/\partial\bar{R}$ . Iz tog uslova dobija se kvadratna jednačina sa dva rešenja:

$$\bar{R}_{1/2} = \frac{\sqrt{\pi} \left( \frac{3}{4} \frac{\hbar^2}{m^2} + h^2 \right)}{MG} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{6}{\sqrt{\pi}} \frac{\lambda \hbar^4 GM^2}{m^4 c^4 \left( \frac{3}{4} \frac{\hbar^2}{m^2} + h^2 \right)^2}} \right) \quad (53)$$

Iz prethodnog izraza se iz uslova da je potkorena veličina nenegativna dobija izraz za maksimalnu masu haloa  $M_c$  za dat ugaoni moment po jedinici mase:

$$M_c = \frac{2\pi\sqrt{3}c^2}{\sqrt{G\lambda}} \left( 1 + \frac{8h^2m^2}{3\hbar^2} \right) \quad (54)$$

to jest:

$$M_c = 1.2 \frac{1}{\sqrt{\lambda_{96}}} (1 + 8m_{22}^2 h_{24}^2) \cdot 10^{11} M_{\odot} \quad (55)$$

pri čemu smo masu i parametar samointerakcije izrazili kao:

$$m = m_{22} \cdot 10^{-22} \text{ eV}, \quad \lambda = \lambda_{96} \cdot 10^{-96} \quad (56)$$

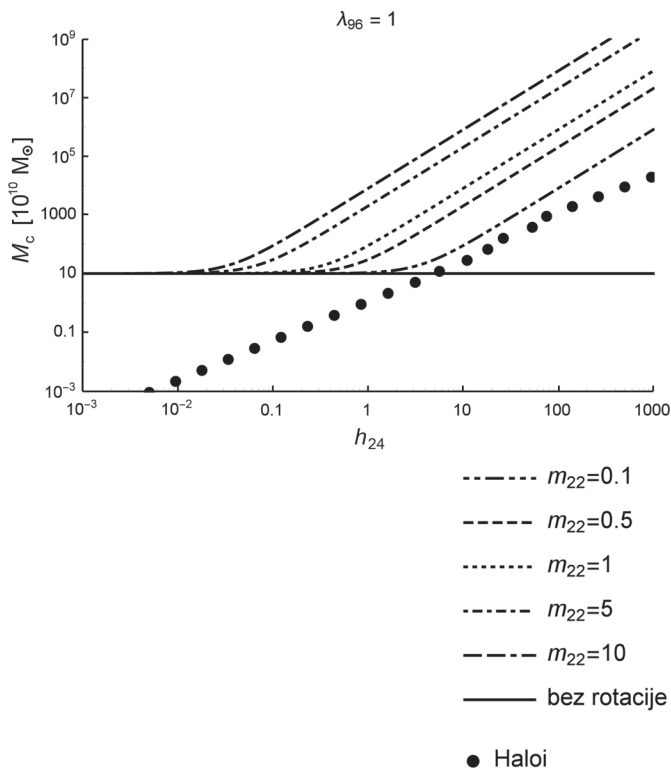
Može se uočiti razlika od jednog reda veličine u odnosu na izraz za kritičnu masu dat u Desjacques *et al.* (2018). Naša pretpostavka je da je poreklo razlike u računskoj grešci u (*ibid.*). Ovakav zapis olakšava izračunavanje zbog toga što su očekivane vrednosti za masu upravo  $10^{-22}$  eV a za parametar samointerakcije  $10^{-96}$  (*ibid.*). Primitimo da je izraz za kritičnu masu u skladu sa rezultatima iz (*ibid.*) kada je  $h = h_{24} \cdot 10^{24} \text{ m}^2/\text{s} = 0$ .

Kako uslov da je izvod ukupne energije jednak nuli daje ekstremume energije, potreban uslov za minimum je i da važi  $\partial^2\mathcal{H}/\partial\bar{R}^2 > 0$ , koji zadovoljava samo rešenje sa negativnim znakom.

## Rezultati i diskusija

Na slici 1 je na osnovu jednačine (55) prikazana zavisnost  $M_c$  od ugaonog momenta po jedinici mase, za različite vrednosti mase čestice i mase haloa. Različite krive na slici 1 predstavljaju granice stabilnih konfiguracija ( $M, h$ ) haloa za različite mase čestice. Tačke predstavljaju zavisnost mase haloa od ugaonog momenta na osnovu kosmološke perturbativne teorije. Sve konfiguracije ispod linija su stabilne, dok su one koje su iznad nestabilne.

bilne. Ravna linija  $10^{11} M_{\odot}$  predstavlja granicu stabilnosti ukoliko halo i rotiraju. Vidimo da rotacija koriguje tu granicu, dopuštajući i haloe masivnije od  $10^{11} M_{\odot}$  ukoliko poseduju adekvatni ugaoni moment, što je slučaj za sve parametre koje smo razmatrali. Primećujemo da su halo masa ispod  $10^{11} M_{\odot}$  stabilni nezavisno od njihovog ugaonog momenta. Krive sa slike 1 date su za očekivanu vrednost parametra samointerakcije  $10^{-96}$ . Kako se ove krive, na osnovu jednačine (55), skaliraju sa  $\lambda^{-1/2}$ , variranje ovog parametra ne utiče značajno (do na red veličine) na zaključke izvedene na osnovu slike 1.



Slika 1. Zavisnost kritične mase  $M_c$  (isprekidane linije i puna linija) od ugaonog momenta po jedinici mase. Tačke predstavljaju haloe mase  $M$  u jedinicama  $10^{10}$  masa Sunca za koje je procenjen ugaoni moment po jedinici mase  $h$ . Različite isprekidane linije odgovaraju različitim masama čestice  $m_{22}$ . Halo se smatraju stabilnim ukoliko je njihova masa i ugaoni moment takav da se nalaze ispod linije. Krive kritične mase su date za parametar samointerakcije  $\lambda_{96} = 1$ .

Figure 1. The dependency of the critical mass  $M_c$  (full and dashed lines) on angular momentum per unit mass. The dots represent halos of mass  $M$  in units of  $10^{10}$  Solar masses for which the estimated angular momentum per unit mass is  $h$ . Different dashed lines correspond to different particle masses  $m_{22}$ . Halos are considered stable if their mass and angular momentum are such that they are located below the corresponding line. The  $M_c$  lines are given for the case where the self interaction parameter has the value of  $\lambda_{96} = 1$ .

Pri proceni ugaonog momenta u odeljku 3 aproksimirano je da masa koja kolapsirajući postaje halo ima oblik sfere, što generalno nije slučaj. U radu Harada *et al.* (2017) opisan je način procene ugaonog momenta za sferoidni oblik kolapsirajuće mase, koji zavisi od spljoštenosti sferoida. Taj doprinos je prvog reda po kontrastu gustine, a doprinos procenjen ovde i u Peebles (1969) je drugog reda. Osim toga, postoji i doprinos drugog reda po kontrastu gustine kada je halo sferoidnog oblika. Kako na ove doprinose utiče spljoštenost, potrebno je ispitati njihov značaj na relevantnom rasponu spljoštenosti. Dakle, za konzistentnu procenu ugaonog momenta nastalog u

linearnom režimu zaključno sa doprinosima drugog reda po kontrastu gustine, potrebno je analizirati i uporediti sva tri pomenuta doprinosa.

U ovom radu haloj su uzeti kao stabilni ukoliko kombinacija mase i radijusa zadovoljava uslov minimuma energije  $\mathcal{H}(M, R)$ . Međutim ovaj minimum može biti lokalni, ali ne mora biti i globalni. U načelu, u zavisnosti od dubine minimuma, manji poremećaji u strukturi bi mogli da destabilizuju halo. Stoga je i ovde potrebno ispitati male oscilacije ovih konfiguracija, kako bi se unapredila gruba energetska analiza stabilnosti korišćena kod Desjacques *et al.* (2018). Korišćenje realističnijeg opisa profila gustine haloa verovatno ne utiče kvalitativno na zaključke, ali bi zbog kompletnosti bilo korisno i to razmotriti.

U jednačini (23) koja opisuje razvoj nehomogenosti u linearnom režimu, kvantni pritisak ima suprotan efekat u odnosu na gravitaciju, što se generalno interpretira kao da je delovanje kvantnog pritiska suprotstavljeno gravitaciji. Međutim, to nije uvek tačno. Članovi drugog reda u perturbativnom razvoju kvantnog pritiska deluju u smeru u kom i gravitacija. U radu Li *et al.* (2018) pokazano je da postoje situacije u kojima kvantni pritisak potpomaže gravitacioni kolaps. Trebalo bi razmotriti da li ovo zapažanje igra ulogu u slučaju formiranja haloa od ULA.

I pored prostora za dalje usavršavanje metodologije korišćene u analizi stabilnosti proto-haloo, rezultati ovog rada svakako ukazuju da je uključivanje uticaja rotacije u analizu neophodno za adekvatno razumevanje stabilnosti proto-haloo, te i za razumevanje njenih posmatračkih posledica.

## Zaključak

Izvršena je analiza stabilnosti primordijalnih haloo ultra lake aksionske tamne materije. Analiza je urađena minimizacijom energije haloo, pri čemu su uračunati energetske doprinosi gravitacije, kvantnog pritiska, samointerakcije i rotacije. Dobijena je relacija koja povezuje masu, radijus i ugaoni moment stabilnih haloo, kao i izraz za kritičnu masu u zavisnosti od ugaonog momenta, mase čestice i parametra samointerakcije.

Ugaoni moment proto-haloo je procenjen korišćenjem linearne perturbativne teorije formiranja struktura, uzimanjem vrednosti akumulirane u linearnom režimu. Kod haloo masivnijih od  $10^{11}$  masa Sunca, rotacija može da stabilizuje haloo koji bi inače bili nestabilni.

**Zahvalnost.** Zahvaljujemo se Marku Simonoviću na veoma korisnim diskusijama na temu konzistentnosti procene ugaonog momenta kao i na savetima pri pisanju kodova u programskom jeziku Mathematica. Osim toga, predavanja o kosmološkoj perturbativnoj teoriji i kosmologiji uopšte koja su realizovana u periodu od kraja 2017. do sredine 2019. u ISP su imala značajan uticaj na naše razumevanje materije. Na kraju, želimo da se zahvalimo i mentorima, Mateji Boškoviću i Vladanu Đukiću na usmeravanju i diskusijama koje su upotpunile naše shvatanje mnogih pojmova iz (astro)fizike.

## Literatura

- Armendariz-Picon C., Neelakanta J. T. 2014. How cold is cold dark matter?. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **2014** (03): 049.
- Banik N., Christopherson A. J., Sikivie P., Todarello E. M. 2015. Linear Newtonian perturbation theory from the Schrödinger-Poisson equations. *Physical Review D*, **91** (12): 123540.
- Binney J., Tremaine S. 2011. *Galactic dynamics* (Vol. 20). Princeton university press
- Carroll B. W., Ostlie D. A. 2017. *An introduction to modern astrophysics*. Cambridge University Press
- Del Popolo A., Le Delliou M. 2017. Small scale problems of the CDM model: a short review. *Galaxies*, **5** (1): 17.
- Desjacques V., Kehagias A., Riotto A. 2018. Impact of ultralight axion self-interactions on the large scale structure of the Universe. *Physical Review D*, **97** (2): 023529.
- Dodelson S. 2011. The real problem with MOND. *International Journal of Modern Physics D*, **20** (14): 2749.
- Harada T., Yoo C. M., Kohri K., Nakao K. I. 2017. Spins of primordial black holes formed in the matter-dominated phase of the Universe. *Physical Review D*, **96** (8): 083517.
- Hui L., Ostriker J. P., Tremaine S., Witten E. 2017. Ultralight scalars as cosmological dark matter. *Physical Review D*, **95** (4): 043541.
- Lewis A., Challinor A., Lasenby A. 2000. Efficient computation of CMB anisotropies in closed FRW models. *The Astrophysical Journal*, **538**: 473.
- Li X., Hui L., Bryan G. L. 2019. Numerical and perturbative computations of the fuzzy dark matter model. *Physical Review D*, **99** (6): 063509.
- Marsh D. J. 2016. Axion cosmology. *Physics Reports*, **643**: 1.
- Peebles P. J. E. 1969. Origin of the angular momentum of galaxies. *The Astrophysical Journal*, **155**: 393.



## Stability Analysis of Rotating Ultra-Light Axion Dark Matter Halos

One of the models of dark matter is the ultra-light axion (ULA) dark matter which consists of particles with a mass of  $10^{-22}$  eV/ $c^2$ , and de Broglie wavelength of the order 1 kpc. This type of dark matter manifests its quantum-mechanical features on galactic scales, which impacts the formation of structures such as halos, pancakes and filaments. Desjacques *et al.* (2018) have made an analysis of the stability of ULA dark matter structures, while neglecting the effects of rotation. They have shown that in the presence of the attractive self-interaction of particles, which is commonly neglected, a critical mass after which halos are not stable exists. This paper extends their analysis by taking into account the effects of rotation. By minimizing the effective potential of the halo, we have found the expression for the critical mass which depends on the halo's angular momentum, the particle mass and the strength of self-interaction. Angular momentum has been estimated using the cosmological perturbation theory in the linear regime. After the linear phase of the cosmological fluctuation evolution, there is no mass transfer between the proto-halo and the neighboring regions, as the proto-halo starts collapsing. Therefore the angular momentum does not change significantly during the early phase of the nonlinear regime. It has been shown that the angular momentum plays a crucial role in the stabilization of halos at certain halo mass intervals, depending on the mass of the ULA dark matter constituent particle.

