

Orbitalna dinamika tela pod dejstvom vremenski-periodičnih perturbacija

U ovom radu su razmatrane posledice scenarija u kome je tamna materija jednim delom sačinjena od ultra lakih aksiona (ULA). Ove čestice se mogu makroskopski opisati realnim skalarnim poljem koje periodično osciluje. Glavni cilj ovog rada je razumevanje orbitalne dinamike tela pod dejstvom vremenski-periodične perturbacije koja proističe iz takvog polja. Analiziran je uticaj ULA na stabilnost orbita tela čija je dinamika prevashodno diktirana prisustvom centralnog tela. Za određene vrednosti kružnih učestanosti kretanja, primećeno je da telo može ući u rezonancu sa oscilovanjem tamne materije, što kao rezultat ima karakteristične promene orbite. Ustanovljena je zavisnost amplituda i perioda pikova rezonanci od parametara koji karakterišu vremenski-periodičan potencijal. Produblјivanje započete analize može biti iskorišćeno u predikciji karakterističnih promena u orbitama S zvezda u galaktičkom centru.

Uvod

Poteškoće standardnog modela tamne materije, modela hladne tamne materije, da reprodukuje ponašanja tela na galaktičkim i subgalaktičkim skalama podstakle su razvijanje alternativnih modela. Upravo je jedan od njih i model tamne materije jednim delom sačinjene od ultra lakih aksiona (ULA) (Hui *et al.* 2017).

Postojanje ULA motivisano je teorijom struna i oni se mogu makroskopski opisati realnim skalarnim poljem. Rešenje jednačine skalarnog polja u njutnovskom limesu, pored standardnog

potencijala ima i oscilujuću komponentu, čija frekvencija oscilovanja zavisi od mase ULA. Samim tim, galaktički halo sačinjeni od ULA stvarali bi periodično promenljiv gravitacioni potencijal. Orbitalnu dinamiku u takvom galaktičkom halou možemo razmatrati kao kretanje tela pod uticajem vremenski-periodične perturbacije (Bošković *et al.* 2018).

Prisustvo vremenski-periodične perturbacije se direktno odražava na orbite, ali u slučaju rezonance promene orbite su najizraženije. Do rezonance dolazi u slučaju kada je frekvencija oscilovanja vremenski-periodične perturbacije srazmerna kružnoj učestanosti orbitiranja tela.

Masi čestice ULA od 10^{-22} eV/c² odgovara period oscilovanja od $T = \frac{h}{mc^2} \sim 1$ godine. Period

orbitiranja Sunca oko centra galaksije je $\sim 2.5 \cdot 10^8$ godina. Pošto je kružna učestanost oscilovanja ULA 10^8 puta veća od kružne učestanosti orbitiranja Sunca, i njemu po periodu sličnih zvezda, ono se nalazi u brzo-promenljivom potencijalu, pa je stoga uticaj pozadinskih perturbacija zanemarljiv (Bošković *et al.* 2018).

S druge strane, zvezde bliske supermasivnoj crnoj rupi (SMBH), poput S zvezda, koje imaju period oscilovanja oko centra galaksije reda desetina godina, mogu da uđu u rezonancu sa oscilovanjem ULA. Karakteristične promene njihovih orbita bi mogle biti observabilne. Detekcija takvih promena sugerisala bi postojanje ULA, ili omogućila sužavanje opsega parametara koji ih opisuju.

Uporedo, sticanjem šire slike o dinamici tela u prisustvu vremenski-periodične perturbacije, može se razumeti uticaj pritiska zračenja promenljive zvezde na orbite malih tela koja se oko nje kreću. Naime, periodično-promenljiva luminoznost zvezde izaziva vremenski promenljivi

Milica Stepanović (2000), Beograd, Cara Dušana 121/1 Zemun, učenica 3. razreda Zemunske gimnazije

Ana-Marija Čeranić (1999), Beograd, Bulevar Kralja Aleksandra 318, učenica 4. razreda Prve beogradske gimnazije

MENTOR: Mateja Bošković, Istraživačka stanica Petnica

pritisak zračenja koji može imati značajan uticaj na dinamiku malih tela (Saslaw 1978). U opisanju orbitalnog kretanja oko promenljivih zvezda, promenljivu luminoznost, odnosno promenljiv pritisak zračenja možemo opisati vremenski-periodičnom perturbacijom.

Cilj ovog rada je razumevanje veze između rezonanci, njihovog perioda i amplituda pikova i parametara koji opisuju vremenski-periodičnu perturbaciju.

Kretanje tela u promenljivoj potencijalu

Kretanje tela u periodično promenljivoj potencijalu opisujemo drugim Njutnovim zakonom za konzervativnu silu uz prisustvo radialne vremenski-periodične perturbacije na sledeći način:

$$\ddot{r} - \frac{l^2}{r^3} = -V'(r) + f_0(r) \cos(2\omega t + \alpha) \quad (1)$$

gde je V vremenski nezavisna komponenta gravitacionog potencijala. Vremenski izvodi su označeni tačkom, a radialni apostrofom. U slučaju kada razmatramo dinamiku oko promenljive zvezde, V potiče od njene gravitacije. S druge strane, u kontekstu kretanja S zvezda oko SMBH u halou koji je delom sačinjen od ULA, on je uzrokovan prisustvom SMBH i pozadniske mase. Član:

$$f_0(r) \cos(2\omega t + \alpha) \quad (2)$$

predstavlja periodično promenljivu komponentu potencijala, odnosno vremenski-periodičnu perturbaciju frekvencije ω , a l redukovani moment impulsa:

$$l = r^2 \Omega$$

gde je Ω kružna učestanost orbitiranja tela i r radijus orbite.

Jednostavnosti radi nadalje ćemo smatrati da je kretanje u odsustvu perturbacije kružno, kada važi:

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{V'}{r_0}} \quad (3)$$

gde je Ω_0 kružna učestanost orbitiranja tela u odsustvu perturbacije i gde je V' evaluiran u r_0 .

Pošto izraz (1) ne može biti rešen egzaktno analitički, jednačina je rešavana perturbativno. Rađena je perturbacija radijusa oblika:

$$r = r_0 + \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2$$

za sve članove jednačine kretanja po perturbativnom parametru (ε) oko nule, kako bi se utvrdila stabilnost orbite. Perturbativni doprinos člana (2) je reda ε , i zbog toga se on nalazi u prvom redu perturbativnog razvoja. Dobijeno je sledeće:

$$\ddot{r}_0 - \frac{l^2}{r_0^3} = -V'(r_0) \quad (4)$$

$$\ddot{\eta}_1 + \frac{3l^2}{r_0^4} \eta_1 = -V''(r_0) \eta_1 + f_0'(r_0) \cos(2\omega t + \alpha) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_2 + \frac{3l^2}{r_0^4} \eta_2 - \frac{6l^2}{r_0^5} \eta_1^2 = \\ = -V''(r_0) \eta_2 - \frac{1}{2} V'''(r_0) \eta_1^2 + f_0'(r_0) \cos(2\omega t + \alpha) \eta_1 \end{aligned} \quad (6)$$

Nadalje se zadržavamo na prvom redu perturbativnog razvoja, odnosno posmatramo samo članove skalirane sa prvim stepenom perturbativnog parametra ε . Tako dobijena jednačina (5) predstavlja jednačinu prinudnog oscilatora u kojoj do pojave rezonanci dolazi u slučaju kada kružna učestanost (ω) ima vrednost ω_{res} :

$$\omega_{\text{res}} = \frac{1}{2} \sqrt{3\Omega^2 + V'''(r_0)} \quad (7)$$

Da bismo stekli uvid u efekat viših članova na linearnom nivou u gore opisanom perturbativnom razvoju, dozvolićemo da parametar koji kvantifikuje perturbaciju radijusa ε i parametar koji kvantifikuje intezitet perturbacije a ne budu isti (Saslaw 1978):

$$\begin{aligned} \varepsilon \ddot{\eta}_1 + \left(\frac{3l^2}{r_0^4} + V''(r_0) - a f_0'(r_0) \cos(2\omega t + \alpha) \right) \cdot \varepsilon \eta_1 = \\ = a f_0'(r_0) \cos(2\omega t + \alpha) \end{aligned} \quad (8)$$

Ukoliko bismo uzeli da je $a = \varepsilon$, član koji je višak u odnosu na (5) bi postao deo jednačine (6). Na taj način, na linearnom nivou uvrštavamo doprinose viših članova. Nadalje ćemo parametre perturbativnog razvoja a i ε „apsorbovati” u η_1 i f_0' . Izraz (8) ima oblik nehomogene jednačine Matjea, i ne može se analitički rešiti. Ova jednačina ispoljava parametarske rezonancije. One,

kao i regularne rezonancije, izazivaju značajno povećanje amplitude. Za razliku od regularnih rezonancija, gde dolazi do linearnog povećanja amplitude sa vremenom, kod parametarskih rezonancija rast amplitude je ekponencijalan (Bender i Orszag 1999). Iako član koji ih izaziva ima manji perturbativni doprinos u odnosu na ostale članove parametarske rezonancije mogu imati kumulativni efekat i na taj način uticati na stabilnost orbite. Da bismo ih opisali moramo steći uvid u doprinose viših redova perturbacije kretanja. Stabilnost jednačine (8) se može razmatrati na nivou homogene jednačine Matjea oblika (Bošković *et al.* 2018):

$$\frac{d^2\eta_1}{dt^2} + (4\omega_{\text{res}}^2 + \chi(2\omega)^2 \cos 2\omega t)\eta_1 = 0 \quad (9)$$

gde χ sada kvantifikuje intezitet perturbacije. Na osnovu jednačine (9) je moguće određivanje vrednosti frekvencija oscilovanja sistema pri kojima dolazi do parametarskih rezonancija i razmatranje stabilnosti jednačine u zavisnosti od parametara $a = \frac{\omega_{\text{res}}^2}{\omega^2}$ i $\chi = \frac{f'_0(r_0)}{4\omega^2}$.

U slučaju $a = \frac{N^2}{4}$ (gde je N prirodan broj) rešenja su nestabilna za sve vrednosti χ osim $\chi = 0$ (Bender i Orszag 1999). Samim tim frekvencije u slučaju parametarskih rezonancija imaju sledeći oblik:

$$\omega = \frac{2\omega_{\text{res}}}{N} \quad (10)$$

Parametarske rezonancije predviđaju eksponencijalni rast orbite i to se može zaključiti iz jednačine (8). Međutim, to predviđanje isključuje uticaj članova iz viših redova perturbativnog razvoja koji takođe doprinose stabilnosti orbite. Njih je moguće uzeti u obzir jedino proučavajući direktno početnu jednačinu (1). Zbog nemogućnosti da se tome adekvatno pristupi analitički, nadalje ćemo prisupiti numerički, prvo u kontekstu kretanja tela u neposrednoj blizini SMBH.

Kretanje tela u neposrednoj blizini SMBH u prisustvu ULA

U slučaju koji se sada razmatra kretanje tela je primarno diktirano SMBH, ali na njega utiče i homogena pozadina (aprkosimacija za sva druga masivna tela, prašinu i gas koji se nalaze unutar

orbite), kao i vremenski-periodična perturbacija zbog prisustva ULA.

Kretanje tela moguće je opisati na njutnovskom nivou u prvij aproksimaciji:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{1}{r^3}\vec{r} - \frac{M_{\text{ext}}(r)}{r^3}\vec{r} + 4\pi\lambda_{\text{ULA}}\rho_{\text{ext}}\vec{r} \cos(2\omega t + 2Y) \quad (11)$$

Gornja jednačina je formulisana u bezdimenzionalnom obliku uvodenjem reskaliranih veličina pogodnih za naš problem:

$$t \rightarrow \frac{t}{\tau_{\text{dyn}}}, r \rightarrow \frac{r}{r_1}, M \rightarrow \frac{M}{M_{\text{SMBH}}} \quad (12)$$

gde je M_{SMBH} masa centralnog objekta, u ovom slučaju SMBH oko koje telo orbitira, r_1 radijus kružne orbite u slučaju zanemarivanja pozadine i vremenski-periodične perturbacije,

$$\tau_{\text{dyn}} = \frac{1}{\sqrt{GM_{\text{SMBH}}/r_1^3}}$$

dinamička skala neperturovanog kretanja i Y fazna razlika. U slučaju koji se trenutno razmatra $r_1 = 10$ mpc, $\tau_{\text{dyn}} = 7.4$ yr gde su odabrane vrednosti motivisane vrednostima za orbitu i period S2 zvezde. Takođe je uzeto da je $Y = 0$.

Za početak potrebno je odrediti početne uslove koji bi odgovarali kružnoj orbiti u odsustvu vremenski-periodične perturbacije. Njih je moguće dobiti iz uslova minimuma efektivne potencijalne energije, odnosno minimuma sledeće funkcije (Tong 2018):

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{1}{r} + \frac{l^2}{2r^2} + M_{\text{ext}} \frac{r^2 - 3R^2}{2R^3} \quad (13)$$

Početni uslovi za kružnu putanju za $r = 1$ u odsustvu vremenski-periodične perturbacije:

$$\dot{r} = 0, \dot{\phi} = \sqrt{1 + \frac{M_{\text{ext}}}{R^3}}, \phi = 0 \quad (14)$$

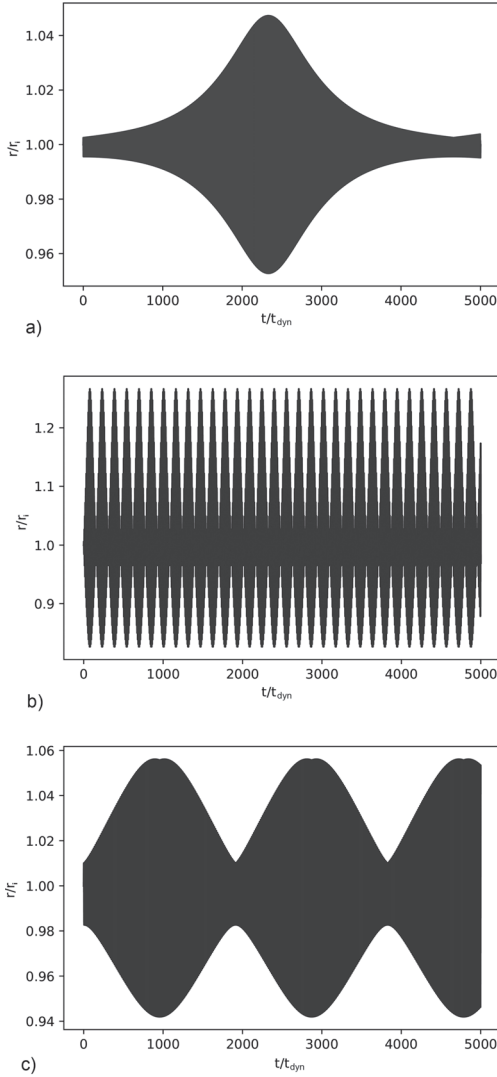
Radi daljeg numeričkog rešavanja izraz (13) je podeljen po komponentama na dva zasebna:

$$r \ddot{\phi} + 2\dot{r} \dot{\phi} = 0 \quad (15)$$

$$\ddot{r} - r \dot{\phi}^2 =$$

$$= -\frac{1}{r^2} - \frac{M_{\text{ext}}}{R^3} r + 4\pi\lambda_{\text{ULA}}\rho_{\text{ext}} r \cos(2\omega t) \quad (16)$$

Da bi se došlo do vrednosti ω koja odgovara pojavi rezonanci primenjeni su zaključci stečeni rešavanjem izraza (7). Varirana je vrednost parametra N u izrazu (10), a potom je jednačina (11) numerički rešavana RK4 metodom (Press *et al.*



Slika 1. Funkcija $r(t)$ u slučaju a) $\omega = 2\omega_{\text{res}}$, b) $\omega = \omega_{\text{res}}$ i c) $\omega = \frac{1}{2}\omega_{\text{res}}$ (za vrednosti mase

homogene pozadine i udela ULA uzeto je $M_{\text{ext}} = 10^{-2}M_{\text{SMBH}}$ i $\lambda_{\text{ULA}} = 0.3$). Zbog rezolucije oscilacije viših frekvencija nisu razdvojene na grafiku.

Figure 1. Function $r(t)$ for a) $\omega = 2\omega_{\text{res}}$, b) $\omega = \omega_{\text{res}}$ and c) $\omega = \frac{1}{2}\omega_{\text{res}}$ (for values of mass of homogeneous background $M_{\text{ext}} = 10^{-2}M_{\text{SMBH}}$ and ULA contribution $\lambda_{\text{ULA}} = 0.3$). Due to the resolution, high frequency oscillations are not separated in the figure.

2007). U slučajevima $N \in \{1, 2, 4\}$, odnosno $\omega = 2\omega_{\text{res}}$, $\omega = \omega_{\text{res}}$ i $\omega = \frac{1}{2}\omega_{\text{res}}$ došlo je do pojave rezonanci. Primitimo da viši članovi smiruju parametarske nestabilnosti u rezonance konačnih amplituda.

Za maksimalnu masu homogene pozadine uzeto je $M_{\text{ext}} = 10^{-2}M_{\text{SMBH}}$, gde je $M_{\text{SMBH}} = 4.02 \times 10^6 M_{\odot}$, dok je za maksimalni mogući doprinos ULA uzeto 30% ($\lambda_{\text{ULA}} = 0.3$) (Bošković *et al.* 2018) i ispitivana je promena radijusa orbite opsegu $M_{\text{ext}} = \{10^{-4}, 5 \times 10^{-4}, 10^{-3}, 5 \times 10^{-3}, 10^{-2}\}$ M_{SMBH} i $\lambda_{\text{ULA}} \in [0.005, 0.3]$ sa korakom 0.005. Na slici 1 prikazana je promena orbite u vremenu za rezonancije redom u slučajevima kada je $\omega = 2\omega_{\text{res}}$, $\omega = \omega_{\text{res}}$ i $\omega = \frac{1}{2}\omega_{\text{res}}$.

Rezonance se javljaju bez obzira na izabrani set parametara koji opisuje oscilujuću komponentu potencijala, M_{ext} i λ_{ULA} u proveravanom opsegu.

Zavisnost perioda i amplituda pikova od parametara periodično promenljive komponente potencijala

Na istom opsegu odabranih parametara, kao u prethodnom odeljku, praćena je promena amplitude i perioda pikova usled rezonancije.

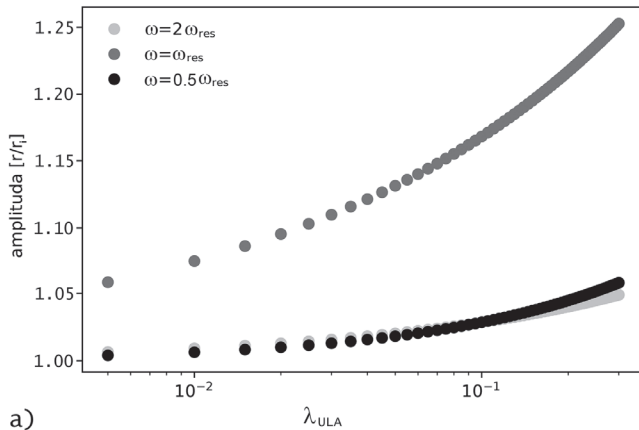
Na slici 2 se može primetiti da porastom doprinosa ULA homogenoj pozadini, odnosno intenziteta oscilujuće komponente, dolazi do povećanja amplitude, odnosno smanjenja perioda rezonancija.

U prethodnim rezultatima podrazumevano je da je fazna razlika $Y = 0$. Da bi se razumeo i njen uticaj na period i amplitude pikova varirana je i ona u opsegu: $Y \in \{0, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi, \pi\}$. Primećeno je da je taj uticaj zanemarljiv, jer je za nekoliko redova veličina manji od uticaja ostalih članova.

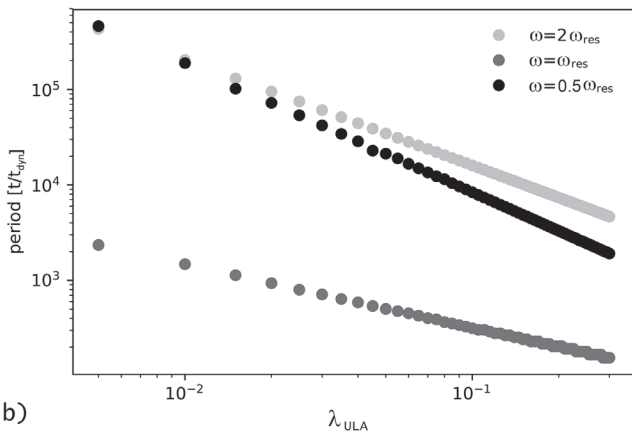
Ispitivanje prostora parametara sistema

Motivisani razumevanjem problema na minimalnom prostoru parametara, jednačina kretanja (11) je svedena na oblik:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{1}{r^2} + k r^n \cos(2\omega t) \quad (17)$$



a)



b)

Slika 2. Zavisnost amplitude (a) i perioda (b) rezonanci od λ_{ULA} za $M_{\text{ext}} = 10^{-2} M_{\text{SMBH}}$

Figure 2. Dependence of amplitude (a) and period (b) of resonances on λ_{ULA} for $M_{\text{ext}} = 10^{-2} M_{\text{SMBH}}$

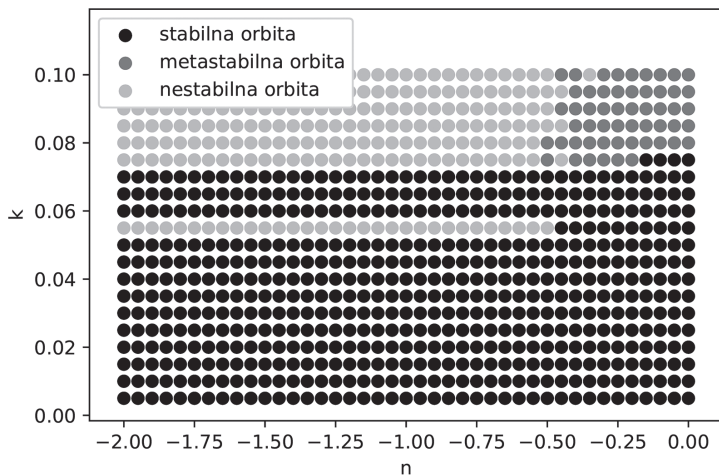
gde je $k = 4\pi\lambda_{\text{ULA}}\rho_{\text{ext}}$, odnosno zanemaren je član $\frac{M_{\text{ext}}(r)}{r^2}$ pošto on u rezonantnim slučajevima (koji se ovde razmatraju) ima najmanji doprinos.

Pozadina ULA, koja je do sada aproksimirana homogenom raspodelom, je parametrizovana uvođenjem n . Ova parametrizacija omogućava razmatranje nehomogene raspodele ULA. Jednačinom (17) je obuhvaćen i problem orbitalnog kretanja malog tela oko promenljive zvezde, gde vremenski-periodična perturbacija ima zavisnost r^{-2} , (r je radijus orbite). Prethodna analiza, koja podrazumeva konstantnu gustinu aksiona, se svodi na slučaj $n = 1$. Na osnovu dobijenih rezultata primećeno je da odsustvo homogene pozadine kvalitativno ne utiče na period i amplitude pikova rezonanci. Stoga su ranije dobijeni rezultati prikazani na slici 2 konzistentni sa apro-

ksimativnom analizom u kojoj je izostavljen uticaj homogene pozadinske mase.

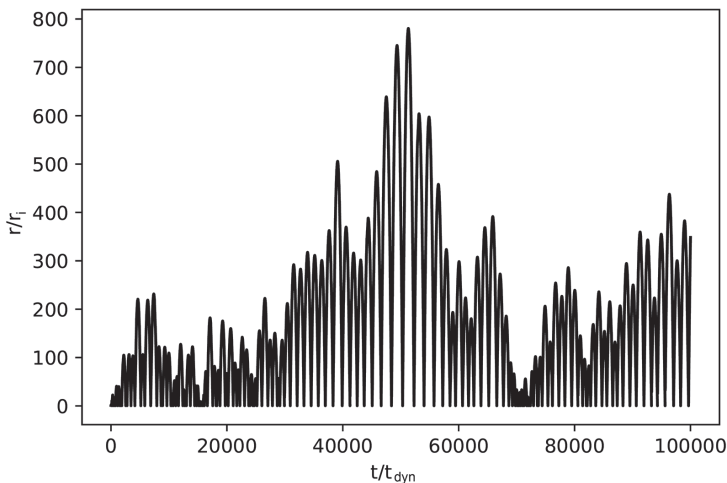
Razmatrani su slučajevi proizvoljnih k i n ($k \in [0.005, 0.1]$ i $n \in [-2, 0]$) i posmatran je njihov uticaj na stabilnost orbite kada je $\omega = \omega_{\text{res}}$ a integracija je vršena u vremenskom intervalu od $100\,000 t/\tau_{\text{dyn}}$.

Na dijagramu stabilnosti (slika 3) primećeno je da su orbite uglavnom vezane u slučajevima kada je $k \leq 0.07$, odnosno da za svako n postoji neko kritično k za koje orbita prestaje da bude vezana. Za razliku od toga Saslaw (1978) u svom radu zaključuje da za vrednost veću od određene vrednosti ω orbite postaju nestabilne nezavisno od vrednosti k . U istom radu je analizi stabilnosti orbite pristupljeno analitički, stroboskopskim metodom, dok je u našem radu korišćen numerički pristup. S obzirom da numerički pristup tre-



Slika 3. Dijagram zavisnosti stabilnosti orbite od parametra k i n

Figure 3. Diagram of dependence of orbit stability on parameters k and n



Slika 4. Zavisnost r od t u slučaju metastabilne orbite

Figure 4. Dependence of r on t in the case of metastable orbits

tira kompletnu jednačinu, naši zaključci su pouzdaniji na razmatranom opsegu prostora parametara.

Iz svega prethodnog se može zaključiti da postoji režim stabilnih, kao i režim nestabilnih orbita određen parametrom k . Pored stabilnog i nestabilnog režima primećeni su i međuslučajevi u kojima orbite deluju vezano, iako poseduju amplitude reda nekoliko stotina neperturovanih radijusa orbite (slika 4).

Kao što se može videti na slici 4, u slučaju metastabilnih orbita dolazi do naglih povećanja amplitude. Ovaj slučaj zahteva dalje razmatranje, pošto nisu uzeti u obzir uticaji drugih masivnih tela u okolini orbite.

Zaključak

U ovom radu ispitivana je dinamika tela u gravitacionom potencijalu u prisustvu vremenski-periodične perturbacije sa fokusom na kretanje tela u neposrednoj blizini SMBH u prisustvu ULA. Primećena je pojava rezonanci u slučajevima $\omega = 2 \omega_{\text{res}}$, $\omega = \omega_{\text{res}}$ i $\omega = \frac{1}{2} \omega_{\text{res}}$, bez obzira na izabrani set parametara u razmatranom opsegu parametara koji opisuju sistem. Varirana je masa homogena pozadine i intenzitet doprinosa ULA, i primećen je očekivan porast amplitude i smanjenje perioda pikova rezonanci sa porastom doprinosa ULA, odnosno intenziteta

oscilujuće komponente potencijala (vremenski-periodične perturbacije). Potom je varirana fazna razlika oscilujuće komponente i primećen je uticaj na period i amplitude pikova, za nekoliko redova veličina manji od uticaja ostalih parametara.

Problem je potom razmatran na minimalnom prostoru parametara. Pozadinska masa, koja je prethodno bila aproksimirana homogenom raspodelom, je parametrizovana, što je omogućilo razmatranje slučaja nehomogene raspodele iste. Samim tim obuhvaćen je i problem orbitalnog kretanja malog tela oko promenljive zvezde gde vremenski-periodična perturbacija ima zavisnost r^{-2} , gde je r radijus orbite. Na osnovu dobijenih rezultata potvrđena je polazna pretpostavka da odsustvo homogene pozadine kvalitativno ne utiče na period i amplitude pikova rezonanci.

Takođe, primećeno je da su orbite uglavnom vezane u slučajevima kada je $k \leq 0.07$, odnosno da za svako n postoji neko kritično k za koje orbita prestaje da bude vezana. Pored stabilnog i nestabilnog režima primećeni su i međuslučajevi u kojima orbite deluju vezano, iako poseduju amplitude reda nekoliko stotina parseka. Fizički, takav scenario nije moguć zbog uticaja drugih, okolnih masivnih tela, stoga je u daljoj analizi potrebno i njih uzeti u obzir.

U ovom radu razmatran je slučaj kružnih orbita. Kako bi analiza bila astrofizički relevantnija, potrebno ju je proširiti i na ekscentrične orbite. Takođe problem je potrebno razmotriti i u slučaju $n > 0$. Pošto nije fizički opravdano da udeo tamne materije neograničeno raste sa rastojanjem, potrebno je uvesti neku vrstu profila gustine (npr. Gausovog tipa). Pored toga potrebno je da se detaljnije ispita režim metastabilnih orbita, odnosno da se poveća rezolucija dijagrama stabilnosti, kako bi se jasnije uvidele granice između režima.

Zahvalnost. Zahvaljujemo se Sanji Mihajlović i Petru Sauliću na pomoći oko numeričke obrade dela podataka, kao i Teodori Čapko i Vladanu Đukiću. Posebnu zahvalnost dugujemo mentoru Mateji Boškoviću.

Literatura

Bender C. M., Orszag S. A. 1999. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory*. Springer

Bošković M., Duque F., Ferreira M., Miguel F., Cardoso V. 2018. Motion in time-periodic backgrounds with applications to ultralight dark matter halos at galactic centers. *Physical Review D*, **98**: 024037.

Hui L., Ostriker P. J., Tremaine S., Witten E. 2017. Ultralight scalars as cosmological dark matter. *Physical Review D*, **95**: 043541.

Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P. 2007. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press

Saslaw W. 1978. Motion around a source whose luminosity changes. *The Astrophysical Journal*, **226**: 240.

Tong D. 2018. Cambridge Lecture Notes on Dynamics and Relativity. Dostupno na: <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/relativity.html>

Milica Stepanović and Ana-Marija Čeranić

Orbital Dynamics Under the Influence of Time-Periodic Perturbations

In this work we have considered the consequences of a scenario in which dark matter is (partly) made of ultra-light axions (ULA). These particles can be macroscopically described by a real scalar field which oscillates. The main goal of this work is understanding the orbital dynamics of a body under the influence of a time periodic perturbation arising from such a field.

We have analyzed the influence of ULA on the stability of stellar orbits, where we considered the case of the dynamics being primarily dictated by the presence of the central body, in the context of S stars orbiting close to the super massive black hole (SMBH). For certain values of angular frequencies of motion it has been noticed that the body could enter in the resonance with the dark matter oscillations. Consequently,

this leads to characteristic changes of the orbit (Figure 1). Resonances occurred regardless of the selected parameter set. We have established a dependence of the amplitudes and the periods of resonance peaks on the parameters that describe time-dependent and periodic potential, mass of the homogeneous background (approximation for all other massive bodies, dust and gas within the orbit) and ULA contribution (Figure 2).

The problem was then considered on a minimal set of parameters. This allowed consideration of both the inhomogeneous background ULA distribution, as well as the motion of small bodies around the variable star, where the time-periodic radiation pressure scales with the

orbital radius r as r^{-2} . It was noticed that there were three regimes, with stable, unstable and metastable orbits (Figure 3). In the case of metastable orbits, there were sudden increases in amplitudes, reaching several hundred pc, but the orbits still seemed bounded. This scenario requires further consideration because the effects of other massive bodies were not included.

Further analysis of the phenomena addressed in this work could be used for the realistic prediction of the characteristic changes of S star orbits around the galactic center in the presence of ULA. Detection of such changes would suggest the existence of ULA or narrow the range of the parameters that describe them. 