

Određivanje elemenata orbite spektralno-trojnog sistema H.D. 100018 (ADS 8189) simpleks metodom

Na osnovu vrednosti radijalnih komponenti brzine za binarnu komponentu trojnog sistema H.D. 100018 (ADS 8189) koje su dobili R.M. Petrie i A.H. Batten u periodu 1956-68. godine (43 merenja), određena su četiri orbitalna parametra sistema. Korišćena je kombinacija Lehman-Filhés-ove grafičke metode i simpleks metode. Osim toga razvijen je i testiran novi algoritam koji se sastoji od dve standardne simpleks metode. Ispostavlja se da nova – „rekurzivna simpleks procedura daje bolje rezultate od standardnih simpleks metoda.

Između godine 1956 i 1968, na Astrofizičkoj opservatoriji Dominion (Dominion Astrophysical Observatory, Canada), Petri i Beten (R.M. Petrie, A.H. Batten) snimaju 43 spektrograma spektroskopsko-trojnog sistema H.D. 100018 (ADS 8189). U ovom radu su, na osnovu njihovih vrednosti radijalnih brzina za komponente Aa i Ab (koje zajedno orbitiraju oko treće komponente B) određeni parametri putanja binarnog dela sistema, osim perioda i trenutka prolaska kroz periastron (uzete vrednosti iz rada Petrija i Betena). Korišćena je kombinacija Lemana-Fileove (Lehman-Filhés, 1893) grafičke metode i simpleks metode za višeparametarsko pretraživanje, za koju je napravljen program u Turbo Pascal-u. Po uočavanju nedostataka standardnog simpleks algoritma napravljen je novi algoritam koji u sebi sadrži dva standardna simpleksa. Ovo rešenje se pokazalo dosta uspešnijim i pomoću njega su dobiveni sledeći rezultati:

komponenta Aa:

$$a_1 \sin i = 0.0471 \text{ a.j.}$$

$$e = 0.355$$

$$\omega_1 = 77.16^\circ$$

$$\gamma = -4.709 \text{ km/s}$$

komponenta Ab:

$$a_2 \sin i = 0.0494 \text{ a.j.}$$

*Milan Bogosavljević
(1977), Niš, Bulevar len-
jina 73/17, učenik 4.
razreda Gimnazije
„Bora Stanković” u Nišu*

*MENTOR:
Mr Rade Pavlović,
Astronomska
Opservatorija
Beograd, Volgina 7*

funkcije masa komponentata:

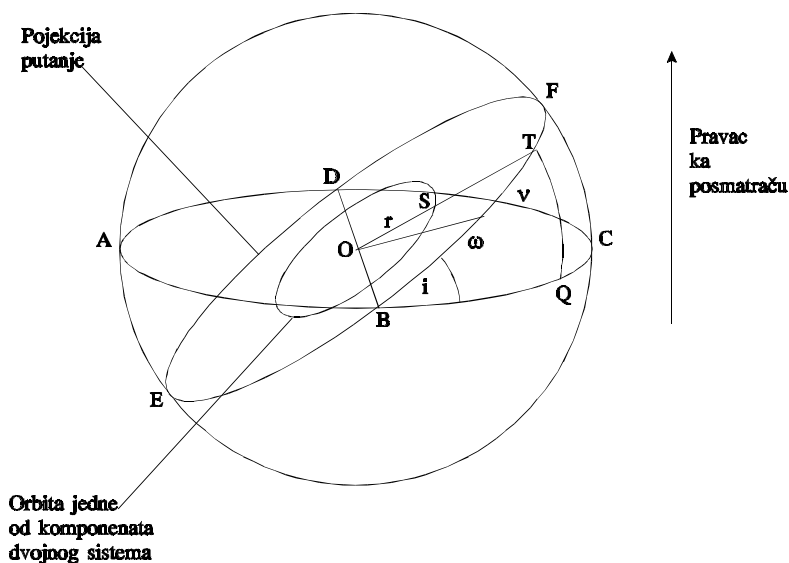
$$M_a \sin^3 i = 1.12 M_\odot \quad M_b \sin^3 i = 1.07 M_\odot.$$

1. Veza između parametara orbita spektralno dvojnih zvezda i vrednosti radijalnih brzina

Neka su r i v – radijus-vektor i prava anomalija tačke S na orbiti zvezde u odnosu na centar mase sistema O (slika 1). Vrednost z predstavlja projekciju radijus-vektora r na pravac ka posmatraču.

$$z = r \sin i \sin (n + \omega) \quad (1.1)$$

gde su i – inklinacija orbite, ω – longituda periastra (takođe predstavljene na sl 1).



Slika 1.
Parametri orbita
spektralno dvojnih
zvezda

Figure 1.
Orbital parameters

Komponenta merene radijalne brzine koja zavisi od orbitalnog kretanja se odatle izvodi:

$$\frac{dz}{dt} = \sin i \sin(v + \omega) \frac{dr}{dt} + r \sin i \cos(v + \omega) \frac{dv}{dt} \quad (1.2)$$

Iz jednačine ellipse je poznato da je radijus vektor r jednak:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v} \quad (1.3)$$

gde su e – ekscentricitet i a – velika poluosa putanje. Koristeći II Keplerov zakon imamo:

$$r^2 \frac{d\nu}{dt} = a b \mu \quad (1.4)$$

gde je uvedena smena $2\pi/P = \mu$ (P – period, μ srednje uglovno godišnje kretanje).

Diferenciranjem jednačine (1.3) po vremenu dobija se:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos\nu)^2} \cdot e \sin\nu \cdot \frac{d\nu}{dt} \quad (1.5)$$

Zamenom izraza (1.3) i (1.4) u (1.5) dobija se:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\mu a}{(1-e^2)^{3/2}} \cdot e \sin\nu \quad (1.6)$$

Takođe iz (1.4.), korišćenjem (1.3) proizilazi:

$$r \frac{d\nu}{dt} = \frac{\mu a}{(1-e^2)^{3/2}} (1+e\sin\nu) \quad (1.7)$$

Zamenom rezultata iz jednačina (1.6) i (1.7) u formulu (1.2) dobija se jednačina:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\mu a \sin i}{(1-e^2)^{3/2}} \left((\cos\nu + \omega) + e \cos\omega \right) \quad (1.8)$$

Na ukupnu vrednost merene radijalne brzine u_r , utiče još i brzina centra mase sistema u odnosu na posmatrača γ :

$$u_r = \frac{dz}{dt} + \gamma \quad (1.9)$$

U jednačini (1.8) samo veličina ν zavisi od vremena (ako smatramo orijentaciju putanje ω konstantnom), međutim ta zavisnost je veoma složena. Prava anomalija ν se određuje preko ekscentrične anomalije E i poznatih jednačina nebeske mehanike (Agekyan 1962: 87):

$$\operatorname{tg} \nu = \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \quad (1.10)$$

$$E - e \sin E = \mu (t - T) \quad (1.11)$$

gde je T – trenutak prolaska kroz periastron.

Prema danas poznatim metodama, iz vrednosti radijalnih brzina se mogu odrediti svi parametri osim inklinacije, što sa sobom povlači

nemogućnost tačnog određivanja poluosa (iz proizvoda $a \sin i$) i pojedinačnih masa. U slučaju kad postoje merenja radijalnih brzina za obe komponente mogu se odrediti samo funkcije masa $M \sin^3 i$ (ibid.).

Ako izraz za III Keplerov zakon:

$$(M_1 + M_2) = \frac{(a_1 + a_2)^3}{P^2} \quad (1.12)$$

gde su: $M_{1,2}$ – mase komponenta izražene u masama Sunca, $a_{1,2}$ – velike poluose orbita komponenta merene od centra mase sistema, izražene u a.j., a P – period, izražen u godinama.

proširimo sa $\sin^3 i$ i iskoristimo relaciju $\frac{a_1}{a_2} = \frac{M_2}{M_1}$ dobijaju se izrazi:

$$M_1 \sin^3 i = \frac{a_2 \sin i (a_1 \sin i + a_1 \sin i (a_1 \sin i))}{P^2} \quad (1.13)$$

$$M_2 \sin^3 i = \frac{a_1 \sin i (a_1 \sin i + a_1 \sin i (a_1 \sin i))}{P^2} \quad (1.14)$$

2. Simplex metoda za višeparametarsko pretraživanje

Ako je potrebno pronaći takav skup (odn. niz) od m parametara $(x_1, x_2, \dots, x_m) = X$ pri kome neka funkcija $F(X)$ ima svoju minimalnu vrednost, koristi se postupak koji su predložili Kalrath i Linnell (1987: 346):

Potrebno je zadati vektor X_1 , koji sadrži početne vrednosti za svaki parametar, i vektor $K = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ koji sadrži vrednost koraka – odnosno, veličinu promene početne vrednosti, za svaki parametar.

Pri pisanju kompijuterskih programa, najpraktičnije je operisati sa svim vrednostima složenim u matricu $(m + 1) \times (m + 1)$ gde je svaki element S_{ij} matrice jednak:

$$S_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & 1 \leq j \leq m \\ F_i = F(X_i), & j = m + 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

Ovde nomenklatura x_{ij} označava j -tu koordinatu vektora X_i . Vektori $X_2 \dots X_{m+1}$ se grade na osnovu početnih vektora X_1 i K , tako što se njihovi elementi slažu na sledeći način:

$$x_{ij} = x_{1j} + k_j \cdot \begin{cases} 0, & i = 1 \\ p, & j = i - 1 \\ q, & \text{ostali sl.} \end{cases} \quad (2.2)$$

gde su, prema Kalratu i Linelu (ibid.), vrednosti p i q :

$$p = \frac{(m+1)^{\sqrt{2}} + m - 1}{(2m)^{\sqrt{2}}}, q = \frac{(m+1)^{\sqrt{2}} - 1}{(2m)^{\sqrt{2}}} \quad (2.3)$$

Za dalji tok operacija je potrebno odrediti sledeće vrednosti:

$$F_h = \max(F_i), \quad (2.4)$$

$$F_s = \max(F_i, i \neq h), \quad (2.5)$$

$$F_l = \min(F_i), \quad (2.6)$$

$$X_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m+1} X_i, \quad i \neq h \quad (2.7)$$

Prema Simpleks metodi, postoje 4 vektorske funkcije kojima se određeni vektor u n -tom koraku iteriranja ($X_i^{(n)}$) može promeniti (u vektor $X_i^{(n+1)}$). Slede njihovi nazivi i definicije:

Refleksija (Reflection):

$$X_\alpha(X) = (1 + \alpha)X_c - \alpha X, \quad 0 < \alpha = \text{koef. refleksije} \quad (2.8)$$

Kontrakcija (Contraction):

$$X_\beta(X) = (1 - \beta)X_c + \beta X, \quad 0 < \beta = \text{koef. kontrakcije} \quad (2.9)$$

Ekspanzija (Expansion):

$$X_\gamma(X) = (1 - \gamma)X_c + \gamma X, \quad 0 < \alpha = \text{koef. ekspanzije} \quad (2.10)$$

Skupljanje (Shrinkage):

$$X_\delta(X) = X_l + \delta(X - X_{lright}), \quad 0 < \alpha = \text{koef. skupljanja} \quad (2.11)$$

U skladu sa prethodnim, postoje četiri načina na koje se simpleks matrica $S^{(n)}$ može izmeniti pri iteriranju u sledeći korak (u matricu $S^{(n+1)}$). Sve operacije su analogne prethodno definisanim vektorskim operacijama, s tim što se pri operacijama refleksije, kontrakcije i ekspanzije ne menjaju svi vektori u matrici već samo onaj koji daje maksimalnu vrednost za funkciju F (vektor X_h , po nomenklaturi upotrebljenoj u (2.4)). Četvrta operacija (skupljanje) utiče na sve vektore u matrici.

Refleksija: $X_h \rightarrow X_\alpha(X_h)$, ako $F_s > F(X_h)$ (2.12)

$$\text{Kontrakcija: } X_h \rightarrow \begin{cases} X_\beta(X_h), & \text{ako } F_h < F(X_\alpha) \\ X_\beta[X_\alpha(X_h)], & \text{ako } F(X_\alpha) < F_h \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\text{Ekspanzija: } X_h \rightarrow X_\gamma \left(X_h \right), \quad \text{ako } F(X_\gamma) < F(X_\alpha) < F_1 \quad (2.14)$$

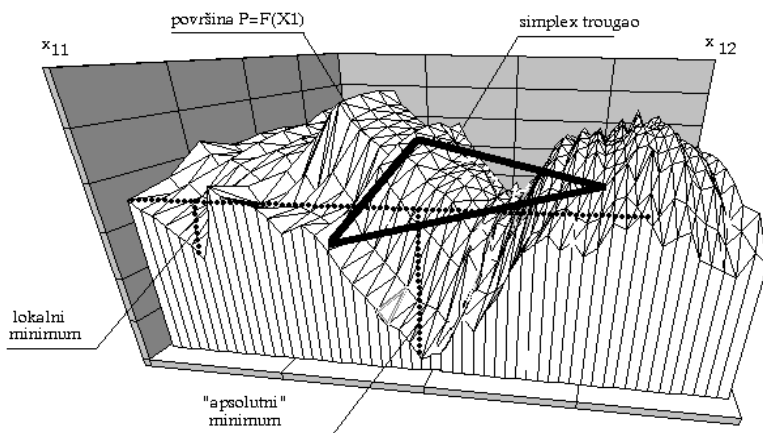
$$\text{Skupljanje: } X_i \rightarrow X_\delta \left(X_i \right), \quad \text{ako } F(X_\beta) \geq F_h \quad (2.15)$$

U konkretnoj implementaciji metode (program urađen u Turbo Pascal-u) je kao algoritamsko rešenje rada sa gore navedenim vektorskim i matičnim operacijama iskorišten predlog koji su dali Kalrath i Linnell (1987):

Da bi se slikovito predstavilo kako cela opisana simpleks metoda u stvari funkcioniše, ilustrovaću na jednostavnijem slučaju, kada je $m = 2$, odnosno kada radimo sa funkcijom dva parametra. Ako imamo funkciju dva parametra (F), potreban nam je $m + 1 = 3$ dimenzionalni prostor (odnosno koordinatni sistem) da bi smo predstavili vrednosti parametara $x_{1,1}$, $x_{1,2}$ (koordinate dvodimenzionalnog vektora $X_1 = (x_{1,1}, x_{1,2})$) i $F(X_1) = F(x_{1,1}, x_{1,2})$. Te tri vrednosti u 3D koordinatnom sistemu određuju jednu tačku. Urtavanjem još dve tačke sa koordinatama $x_{2,1}, x_{2,2}, F(X_2)$ i $x_{3,1}, x_{3,2}, F(X_3)$ dobija se trougao, kojim simpleks metoda ispituje funkciju F . Skup svih mogućih vrednosti funkcije F predstavlja 3D površ P (slika 2). Površ P ima „uzvišenja – mesta gde vrednost $F(X)$ raste, i „udubljenja – mesta gde vrednost $F(X)$ opada. Trougao se u stvari ponaša kao telo pod uticajem gravitacije, te uvek „pada ka dnu „jame u površi P na koju naiđe. Njegovo „kretanje i „padanje po površi P je uslovljeno operacijama i koeficijentima (2.8–2.11). Smisao vektora X_c odgovara „težištu tela pod uticajem gravitacije. Operacija skupljanja dolazi do izražaja onda kada se simpleks telo (za $m = 2$ trougao, ali već za $m = 3$ trostrana piramida itd.) kreće ka dnu određene „jame minimuma te je potrebno da smanjuje sve svoje dimenzije (otuda jedino ova operacija utiče na sve vektore simpleks matrice).

Tokom iteracija, simpleks „telo upoređuje vrednosti funkcije u svakom temenu i, shodno tome, pokreće simpleks ka najmanjoj od pronađenih vrednosti. Nevolja je u tome što se može desiti da simpleks pronađe neki lokalni a ne apsolutni minimum (primeri obeleženi na slici 2) na površi P .

Jedini način da se smanji verovatnoća pronalazjenja nekog lokalnog, „pogrešnog, minimuma je da se početne vrednosti za pretraživanje zadaju u širem opsegu oko određenih približnih, pretpostavljenih vrednosti (do kojih se došlo, na primer, nekom manje preciznom metodom). U tu svrhu je pri primeni algoritma na slučaj određivanja elemenata putanja spektralno dvojnih zvezda korištena Leman-Fileova grafička metoda (detaljnija objašnjenja u odeljku 4). Pomoću nje su dobijene neke početne (orijentacione) vrednosti za svaki traženi parametar, koje su potom iskorištene kao startne vrednosti za simpleks algoritam.



Slika 2.
Prikaz površine P i simpleksa tela (ovde trougao) za slučaj $m = 2$.

Figure 2.
The surface and the simplex in case $m = 2$.

3. Rekurzivni simpleks

U konkretnoj implementaciji simpleks metode, za koeficijente α , β , γ , δ su korišćene vrednosti preporučene kod Kalrath-a i Linnell-a (1987):

$$\begin{aligned} \alpha &= 1.0 \\ \beta &= 0.35 \\ \gamma &= 2.0 \\ \delta &= 0.5. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Jedan od uočenih nedostataka standardne simpleks metode (opisane u odeljku 2) je u tome što se ti koeficijenti unapred zadaju, i što su apsolutno nezavisni od svih rezultata do kojih dolazi simpleks u toku izvršavanja iteracija. Zamislimo takvu površinu P koja je puna bliskih lokalnih minimuma. Nesrećno odabrana kombinacija konstanti α , β ... („konstanti kretanja“) može da dovede do toga da simpleks uvek upada u najbliži minimum, a da mu vrednosti tih konstanti ne omogućavaju da ispita širu okolinu i tako eventualno „iskoči“ u „dublji“ minimum. Takođe, dešava se (istina retko) da se simpleks telo zatvori u petlju ispitujući stalno iste vrednosti.

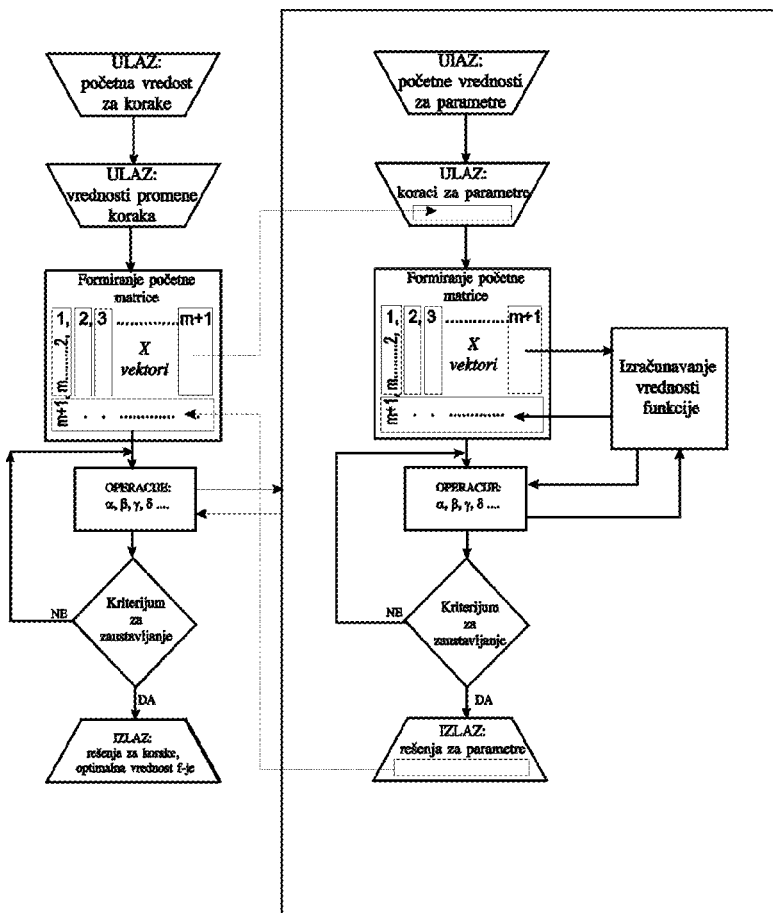
Standardna simpleks metoda opisana u prethodnom odeljku se pri praktičnom radu pokazala vrlo osetljivom na još jednu vrednost koju bi korisnik trebalo da bira proizvoljno (računajući tu da se početne vrednosti ne zadaju proizvoljno već nekom manje preciznom metodom). To je vrednost koraka. Ustanovio sam da simpleks metoda, pri svim istim početnim uslovima, osim vrednosti koraka za 1 parametar, neće dati apsolutno isti rezultat (doduše, u konkretnom primeru se obično radi o razlici na decimalnom mestu koje je daleko od relevantnog). Ispostavlja se da je uzrok tome opet nepromenljivost konstanti kretanja, jer oni nakon formiranja početne matrice (kada se i jedino koristi vrednost za korak) preuzimaju na

sebe izmenu te matrice. Ako se matrica uvek menja sa istom, unapred definisanom srazmerom, onda postaje jasno kako dve i najmanje različite početne matrice neće dovesti do istog rezultata. Kako onda možemo biti sigurni da je naš skup početnih uslova doveo do optimalnog rešenja?

Jasno, ispitivanje „naslepo“ ne vodi nikakvoj pouzdanosti. Pošto različiti setovi početnih uslova (početnih vrednosti za parametre i vrednosti za korake za svaki parametar) dovode do delimično različitih rešenja, došao sam na ideju da simpleks algoritam traži takav skup vrednosti za korake za koje će – on sam, kada ih primeni – dati optimalan rezultat (tj. minimalnu vrednost F).

Takva algoritamska šema „duplog“ ili „rekurzivnog“ simpleksa je predstavljena na slici 3. Na njoj je sa desne strane uprošćeno prikazan standardni simpleks algoritam, a sa leve strane je prikazan „spoljašnji“ simpleks, koji koristi standardni simpleks na isti način na koji bi standardni simpleks koristio odeljak za izračunavanje vrednosti funkcije. Dakle, na onom mestu na kome bi standardni simpleks algoritam pozvao odeljak za izračunavanje vrednosti funkcije, na tom istom mestu spoljašnji simpleks startuje standardni simpleks. U suštini, spoljašnji simpleks služi da startuje samog sebe više puta (jer su i spoljašnji i unutrašnji simpleks suštinski iste strukture), sa istim početnim vrednostima za parametre ali sa različitim vrednostima koraka za parametre i tako pronade optimalno rešenje. Inače, veze odeljaka matričnih operacija (α , β , γ , δ) sa funkcijom (kod unutrašnjeg simpleksa) i sa unutrašnjim simpleksom (kod spoljašnjeg simpleksa) treba da budu predstavljene na isti način kao kod one kod formiranja početnih matrica – po jedna veza od svakog vektora u matrici (uspravni elipsoid) do ulaznog vektora odeljka za izračunavanje vrednosti funkcije i isto sa izlaznim vektorom tog odeljka. Slično i kod spoljašnjeg simpleksa: po jedna veza između odeljka matričnih operacija do ulaza za parametre u unutrašnjem simpleksu, i analogno sa izlaznim vektorom. Ovo je zbog uprošćenja šeme izostavljeno i samo je obeleženo vodoravnim vezama između leve i desne strane slike.

Korisnik ovakve algoritamske šeme može sa mnogo većom verovatnoćom da očekuje, da iako poneki skup početnih vrednosti za korake dovede do „ćorsokaka“, algoritam će to prenebreći, promeniti početne vrednosti koraka za parametre i tražiti „apsolutni minimum“ od više dobijenih rešenja. Preporučljivo je da kriterijum za zaustavljanje iteracija bude dvojak: iteracije treba prekinuti posle izvršenog (zadatog) maksimalnog broja iteracija (čime se izbegava „blokiranje“ algoritma mrtvom petljom). Drugi uslov za prekid iteracija je da standardna devijacija vrednosti funkcija (δ_F) koje simpleks izračunava opadne ispod neke unapred zadate vrednosti. Standardna devijacija se računa po formuli:



Slika 3.
Uprošćena šema
povezanosti dva
simpleksa.

Figure 3.
Simplified flow chart
of the connection
between two
simplexes.

$$\delta_F^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m+1} (F_i - F^*)^2, \quad F^* = \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^{m+1} F_i \quad (3.2)$$

Obe varijante simpleks metode su bile testirana sledećom funkcijom:

$$f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x^2) \quad (3.3)$$

Analitički se može dobiti da ova funkcija ima minimum $F = 0$ za vrednosti $x = 1$ i $y = 1$. Standardna simpleks metoda je, kada sam ja određivao vrednosti za korake parametara x , y , uspela da pronade samo vrednosti u kojima je navodni minimum funkcije $F = 2$ (pri tom su polazni parametri davali vrednost funkcije od 24). Uz pomoć rekurzivnog simpleks algoritma, iz prvog pokušaja su pronađeni odgovarajući početni koraci sa kojima simpleks pronalazi tačna rešenja (obično na 4-5 decimala, zavisno od zadate vrednosti za standardnu devijaciju).

4. Primena Leman-Fileove metode na zvezdu H.D. 100018

Kao što je opisano u odeljku 2, i standardni i rekurzivni simpleks zahtevaju skup početnih vrednosti za svaki parametar. Kako sam pri testiranju simpleksa uvideo da se verovatnoća ne-optimalnog rešenja povećava sa udaljenošću početnih od pravih (traženih) vrednosti za parametre, bilo je neophodno da merenja radijalnih brzina kojima sam raspolagao obradim nekom „ekonomičnom“ metodom i tako dobijem okvirne vrednosti za parametre putanje, pre nego što pustim u rad simpleks metodu. Odabrao sam da početne vrednosti za simpleks iteracije dobijem Leman-Fileovom grafičkom metodom (prema Heintz 1971: 79) koja se u praktičnoj primeni (kada se radi sa malim brojem tačaka) pokazuje kao dosta neprecizna, ali je s druge strane brza i jednostavna.

Pretpostavimo da su poznate vrednosti za T i P , i da je dobijen grafik promene radijalne brzine sa vremenom (slika 4). Kriva promene radijalne brzine u toku vremena treba da zahvata iste površine iznad i ispod γ -ose (odnosno apscise sa vrednošću γ). Iz tog uslova se i nalazi vrednost za parametar γ :

$$\gamma = \frac{1}{P} \int_0^P V dt \quad (4.1)$$

Ako obeležimo ordinate ekstremuma merene od γ ose (kao nulte vrednosti) sa A i B (slika 4), onda važe jednakosti:

$$A = K(1 + e \cos \omega) \quad (4.2)$$

$$B = K(1 - e \cos \omega) \quad (4.3)$$

$$e \cos \omega = \frac{A - B}{A + B} \quad (4.4)$$

gde je sa K obeležena amplituda (tačnije poluamplituda) funkcije (1.8):

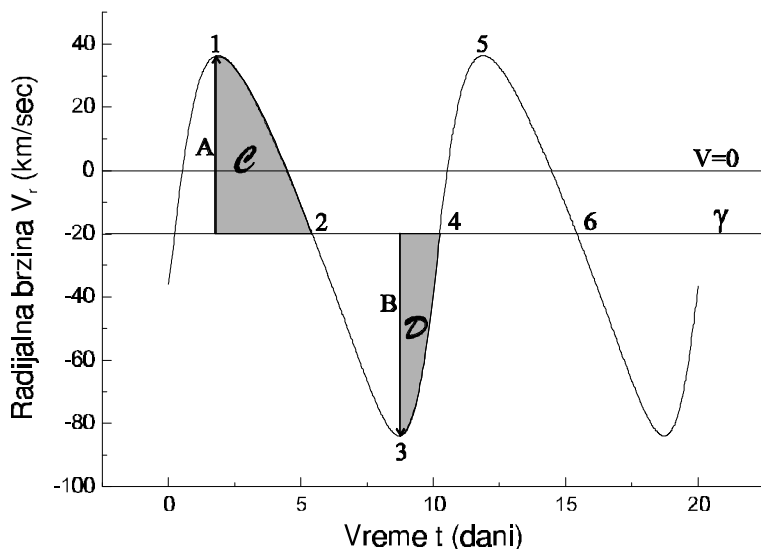
$$K = \frac{\mu a \sin i}{(1 - e^2)^{1/2}} \quad (4.5)$$

U tačkama 2 i 4 na slici 4 vrednost $\frac{dz}{dt} = 0$, pa je shodno tome (iz relacije 1.8):

$$\cos(v_2 + \omega) = \cos(v_4 + \omega) = -e \cos \omega = -\frac{A - B}{A + B} \quad (4.6)$$

Odatle se dobija:

$$\sin(v_2 + \omega) = -\sin(v_4 + \omega) = \frac{2(A - B)^{1/2}}{A + B} \quad (4.7)$$



Slika 4.
Primer krive $u_R(t)$.

Figure 4.
Example of a curve
 $u_R(t)$.

Ako površinu na slici 4, omeđenu krivom V između tačaka 1 i 2, γ -osom i ordinatom A oznažimo sa \mathcal{E} , a površinu, omeđenu krivom V između tačaka 3 i 4, γ -osom i ordinatom B , sa \mathcal{D} važi relacija:

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{D}} = \frac{r_2 \sin(v_2 + \omega)}{r_4 \sin(v_4 + \omega)} = \frac{\sin(v_2 + \omega) - e \sin \omega}{\sin(v_2 + \omega) + e \sin \omega} \quad (4.8)$$

gde je korišćena jednakost (1.1) i proširivanje $v = (v + \omega) - \omega$.

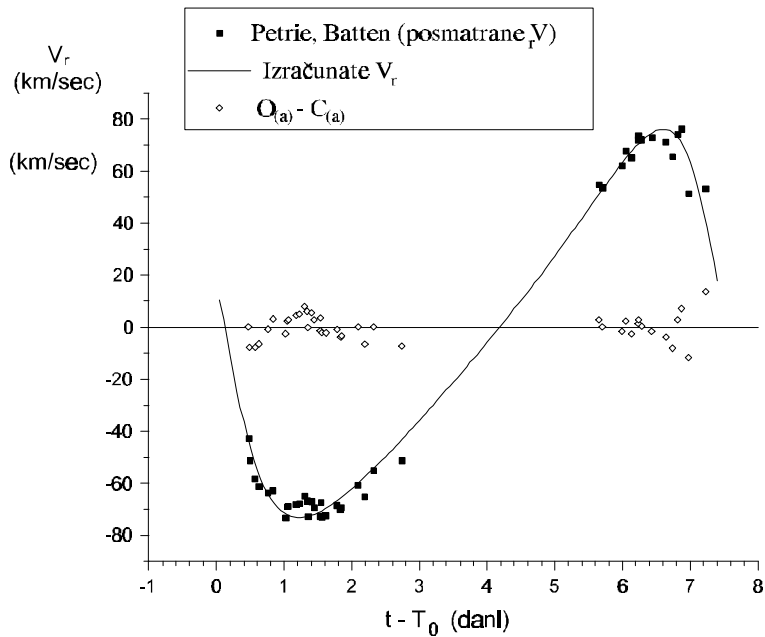
Konačno, korišćenjem (4.7) sa prethodnom relacijom dobija se:

$$e \sin \omega = \frac{2(A B)^{1/2}}{A + B} \cdot \frac{\mathcal{D} - \mathcal{E}}{\mathcal{D} + \mathcal{E}} \quad (4.9)$$

Deljenjem (4.9) sa (4.4) dobija se vrednost ω , a zatim i vrednosti e i K (odnosno, prema (4.5), $\arcsin i$). Da bi se ovom metodom mogli dobiti precizni rezultati, potrebno je imati dovoljno tačaka, ravnomerno raspoređenih na grafiku. U tabeli 1 su navedena sva merenja za komponente A_a i A_b koja su korišćena pri određivanju elemenata orbita. Kao što se vidi sa slika 5 i 6, gde su ucrtana ta merenja zajedno sa krivom (proračunatom rekursivnim simpleksom), ona su uglavnom grupisana oko ekstremalnih tačaka. Ovakav raspored je vrlo nepovoljan za precizno određivanje parametara e i ω , koji jedino utiču na oblik krive (parametar a utiče samo na vrednost amplitude, dok parametri P , T i γ utiču na položaj krive u odnosu na koordinatni početak). Ipak, nanošenjem ovih vrednosti na milimetarski papir i slobodručnim „provlačenjem“ krivulje dobijene su sledeće vrednosti:

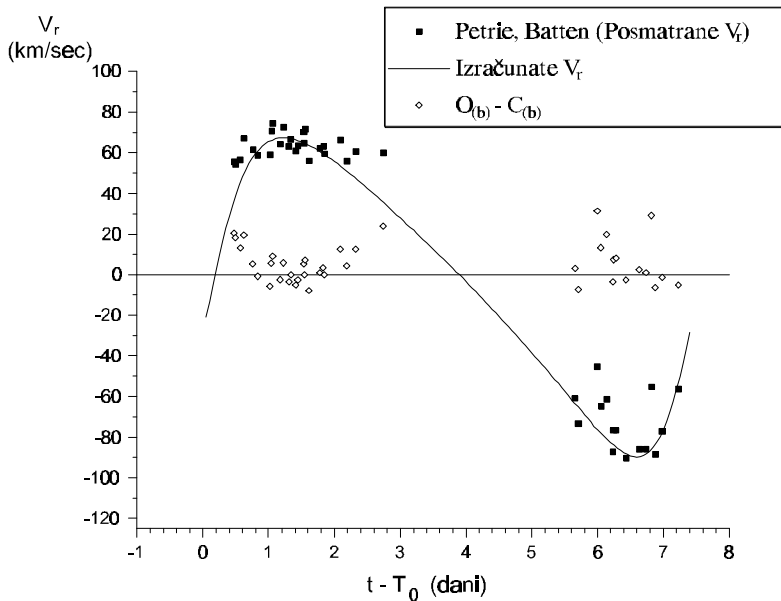
Tabela 1. Podaci merenja za Aa i Ab komponentu.

N ^o	t-T _O (dani)	O _a	Ca	O _a -Ca	O _b	C _b	O _b -C _b
1	0.479	-42.7	-42.702	0.002	55.5	35.127	20.373
2	0.491	-51.4	-43.822	-7.578	54.3	36.301	17.999
3	0.57	-58.3	-50.569	-7.731	56.5	43.376	13.124
4	0.626	-61.2	-54.703	-6.497	67.1	47.711	19.389
5	0.765	-63.5	-62.789	-0.711	61.3	56.189	5.111
6	0.838	-62.7	-65.913	3.213	58.7	59.464	-0.764
7	1.021	-73.3	-70.942	-2.358	59	64.737	-5.737
8	1.047	-68.9	-71.379	2.479	70.8	65.196	5.604
9	1.06	-68.8	-71.576	2.776	74.6	65.402	9.198
10	1.171	-68	-72.696	4.696	64.3	66.576	-2.276
11	1.22	-67.8	-72.906	5.106	72.6	66.797	5.803
12	1.304	-64.8	-72.923	8.123	63.2	66.814	-3.614
13	1.339	-66.7	-72.815	6.115	66.7	66.701	-0.001
14	1.35	-72.8	-72.768	-0.032			
15	1.41	-66.9	-72.413	5.513	60.9	66.279	-5.379
16	1.446	-69.2	-72.124	2.924	63.4	65.976	-2.576
17	1.536	-72.6	-71.182	-1.418	70.3	64.989	5.311
18	1.541	-67.4	-71.121	3.721	64.8	64.925	-0.125
19	1.553	-72.9	-70.972	-1.928	71.7	64.769	6.931
20	1.615	-72.3	-70.129	-2.171	56.1	63.885	-7.785
21	1.778	-68.3	-67.421	-0.879	62.1	61.045	1.055
22	1.832	-70.1	-66.392	-3.708	63.3	59.967	3.333
23	1.849	-69.3	-66.057	-3.243	59.5	59.615	-0.115
24	2.095	-60.6	-60.693	0.093	66.5	53.991	12.509
25	2.193	-65	-58.342	-6.658	56	51.526	4.474
26	2.322	-55.1	-55.108	0.008	60.6	48.135	12.465
27	2.739	-51.2	-43.873	-7.327	60.1	36.354	23.746
28	5.652	54.7	51.87	2.83	-61	-64.035	3.035
29	5.7	53.6	53.596	0.004	-73.2	-65.844	-7.356
30	5.994	62	63.679	-1.679	-45.2	-76.416	31.216
31	6.049	67.8	65.409	2.391	-64.9	-78.23	13.33
32	6.13	65.1	67.813	-2.713	-61.1	-80.751	19.651
33	6.233	72	70.551	1.449	-87.2	-83.621	-3.579
34	6.243	73.7	70.794	2.906	-76.6	-83.876	7.276
35	6.279	71.9	71.628	0.272	-76.6	-84.751	8.151
36	6.432	72.8	74.347	-1.547	-90.3	-87.602	-2.698
37	6.64	71	74.949	-3.949	-86	-88.233	2.233
38	6.732	65.6	73.59	-7.99	-85.8	-86.808	1.008
39	6.819	74	71.113	2.887	-55.1	-84.21	29.11
40	6.868	76.1	69.137	6.963	-88.4	-82.139	-6.261
41	6.979	51.3	62.937	-11.637	-77	-75.638	-1.362
42	7.231	53.2	39.378	13.822	-56.3	-50.936	-5.364



Slika 5.
Proračunata kriva
promene radijalne
brzine za komponentu
Aa zvezde H.D.
100018 (ADS 8189).

Figure 5.
Calculated curve of
the radial velocity for
Aa component of
the star H.D. 100018
(ADS 8189).



Slika 6.
Proračunata kriva
promene radijalne
brzine za komponentu
Ab zvezde
H.D. 100018 (ADS
8189)

Figure 6.
Calculated curve of
the radial velocity for
Ab component of
the star H.D. 100018
(ADS 8189).

Komponenta Aa:

$$\gamma = -4.0 \text{ km/s}$$

$$A_a = 79 \text{ km/s}$$

$$B_a = 66 \text{ km/s}, \quad \omega_1 = 64^\circ \quad (4.9)$$

$$\mathcal{C}_a = 10.4 \text{ km/s}, \quad e = 0.2$$

$$\mathcal{D}_a = 15.1 \text{ km/s}, \quad a_1 \sin i = 0 \text{ a.j.}$$

Komponenta Ab:

$$A_b = 73 \text{ km/s}$$

$$B_b = 79 \text{ km/s}, \quad a_2 \sin i = 0.0506 \text{ a.j.} \quad (4.10)$$

Vrednosti \mathcal{C}_a i \mathcal{D}_a su dobijene u km/s zbog toga što su ucrtavane tačke prethodno bile svedene na fazu (te na apsisama nije bilo nanešeno vreme već faza). Svođenje na fazu je bilo moguće zahvaljujući poznatim vrednostima P i T (Petrie and Batten):

$$P = 7.39902 \text{ dana} \quad (4.11)$$

$$T = \text{J.D. } 2\,437\,823.183. \quad (4.12)$$

5. Rezultati dobijeni simpleks metodom

Simpleks metoda je korišćena da pronađe takav skup parametara $\arcsin i$, e , ω i γ za koje će suma apsolutnih vrednosti razlika između posmatrane i proračunate vrednosti radialne brzine biti minimalna. Dakle, funkcija F u simpleks algoritmima je imala oblik:

$$F_{a,b} = \sum_{i=1}^n |u_{a,b}(t) - u_{R_{a,b}}(t)| \quad (5.1)$$

Broj n ovde označava broj merenja (korišćena 42 merenja za Aa komponentu i 41 merenje za Ab – tabela 1). Vrednost $u_{a,b}$ je uzimana iz tabele 1 ($O_{a,b}$) dok je $u_{R_{a,b}}$ (u tabeli 1 označena sa $C_{a,b}$) proračunavana na osnovu trenutnih vrednosti za $\arcsin i$, e , ω i γ (koordinate matrice vektora) po formuli (1.8).

Turbo Pascal program koji je napravljen za simpleks metodu sadrži obe algoritamske šeme. Ako se startuje deo programa za standardnu simpleks metodu, on izvršava u proseku 5 iteracija svake sekunde, što je obično dovelo do opadanja standardne devijacije ispod 0.000001 za manje 10-tak sekundi (program je testiran na računaru 486 DX4/100 MHz). Rekurzivni simpleks mora više puta u toku svoje jedne iteracije da poziva standardni simpleks, tako da on radi znatno sporije. Njemu je kao uslov za zaustavljanje obično davana vrednost standardne devijacije od 0.01, što je dovelo do konačnog rešenja za vreme od 10-20 min. Konačni rezultati su dobijeni korisćenjem kombinacije standardnog i rekurzivnog simpleksa. Naime, prvi skup početnih uslova je zadat standardnom simpleksu u sledećem obliku:

Početne vrednosti (prema 4.9) koordinate vektora koraka K_1 :

– koordinate vektora X_1 :

$$\begin{aligned} x_{1,1} &= a_1 \sin i = 0.0485 \text{ a.j.} & k_{1,1} &= 0.01 \text{ a.j.} \\ x_{1,2} &= e = 0.20 & k_{1,2} &= 0.15 \\ x_{1,3} &= \omega_1 = 64^\circ & k_{1,3} &= 15.0^\circ \\ x_{1,4} &= \gamma = -4.00 \text{ km/s} & k_{1,4} &= 1.00 \text{ km/s} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Suma apsolutnih vrednosti odstupanja (prema 5.1), kada se iskoriste ove vrednosti kao parametri putanje, iznosi $F_1 = 440.35 \text{ km/s}$.

Iteracije su zaustavljene kada je standardna devijacija opala ispod 0.000001, i standardni simpleks je kao rezultat dao nove vrednosti sa vrednošću ukupne greške od 240.32. Ovi rezultati su postavljeni kao početne vrednosti, i standardni simpleks program je ponovo pušten u rad. Ponovo je korigovao početne vrednosti i dao rezultat sa vrednošću funkcije (sumom apsolutnih vrednosti O–C razlika) od 205.7. Ponovljen je ceo postupak i dobijena rešenja sa ukupnom greškom od 169 km/s. Dalji pokušaji sa standardnim simpleksom nisu doveli do smanjenja ukupne greške pa sam došao do zaključka da treba izmeniti vrednosti za korake. Zbog toga je pušten u rad rekurzivni simpleks. Početne vrednosti parametara za rekurzivni simpleks su bile do tada najoptimalnija rešenja standardnog simpleksa (skup parametara koji daje ukupnu grešku od 169km/s). Početne vrednosti za korake (vektor K_1) su imale vrednosti:

$$k_{1,1} = -0.005 \text{ a.j.}, k_{1,2} = -0.05, k_{1,3} = -1^\circ, k_{1,4} = -2.0 \text{ km/s} \quad (5.3)$$

Kao vrednosti promene koraka su bile zadate:

$$\Delta k_{1,1} = 0.005 \text{ a.j.}, \Delta k_{1,2} = 0.05, \Delta k_{1,3} = 5^\circ, \Delta k_{1,4} = 1 \text{ km/s} \quad (5.4)$$

Ovakve vrednosti sa negativnim predznakom su bile izabrane tako da se omogući efikasnije oscilovanje vrednosti koraka za parametar oko nule na jednu i na drugu stranu. Rekurzivni simpleks je tako pronašao konačna rešenja za parametre orbite Aa komponente:

$$\begin{aligned} a_1 \sin i &= 0.0471 \text{ a.j.} \\ e &= 0.355 \\ \omega_1 &= 77.16^\circ \\ \gamma &= -4.709 \text{ km/s} \end{aligned} \quad (5.5)$$

sa kojima je suma apsolutnih vrednosti razlika između proračunatih i posmatranih radialnih brzina – ukupna O–C = 161.0 km/s. U poređenju sa ovim, Petrie i Batten su dobili vrednosti za parametre koji daju ukupnu grešku od 176 km/s. Najveća razlika je u vrednosti za γ : oni su dobili vrednost od -2.6 km/s . Ostali parametri po Petriju i Betenu su: $a_1 \sin i = 0.0468$, $a_2 \sin i = 0.0495$, $e = 0.36$, $\omega = 78.6$.

Dobijene vrednosti za e , ω ($+ 180^\circ$) i γ su iskoristene kao tačne vrednosti i za komponentu Ab, i simpleks metoda (rekurzivna) je iskoristena samo da pronađe vrednost $a_2 \sin i$. Rezultat je:

$$a_2 \sin i = 0.0494 \quad (5.6)$$

Vrednost ukupne greške za merenja komponente Ab je 364 km/sec. Drastično veća greška je bila i očekivana, jer su merenja za Ab komponentu i na prvi pogled mnogo „lošija – manje prate bilo koju moguću krivu, no što je to slučaj sa merenjima za Aa komponentu. Rešenja Petrija i Betena u ovom slučaju daju grešku koja iznosi oko 344 km/s. Međutim, smatram da su merenja radijalne brzine za komponentu Aa verodostojnija, te sam rešenja za zajedničke parametre (e , $\omega + 180^\circ$ i γ) dobijena na osnovu njih primenio i na komponentu Ab iako daju veću grešku nego što je to slučaj sa rešenjima Petrija i Betena.

6. Zaključak

Simpleks metoda se pokazala kao vrlo korisnom u radu sa složenim funkcijama, s tim što se u svakom trenutku mora biti svestan i njenih nedostataka. Rekurzivni simpleks je napravljen kao pokušaj unapređivanja metode i smanjenja njene nepouzdanosti, međutim, sama činjenica da se rekurzivni simpleks sastoji od dva standardna simpleksa govori o tome da ni on ne daje obavezno i uvek optimalna rešenja. Biranje vrednosti za korake je i dalje uticajan problem (i rekurzivnom simpleksu se moraju zadati neke vrednosti promene koraka!), a potrebna duža testiranja od dosad izvršenih da bi se mogla dati neka generalna preporuka o tome kako birati vrednost promene koraka. U praktičnom radu je ipak najsigurnije više puta upotrebiti simpleks sa različitim početnim skupom vrednosti i pratiti rad programa. Korisno je testirati program sa pozitivnim i negativnim vrednostima za sve korake (ili kombinacija znakova vrednosti za korak i vrednosti promene koraka, kao u 5.3 i 5.4), jer se u nekoliko slučajeva pokazalo da simpleks „neće da smanji vrednost za neki parametar, iako je od ranije poznato (iz praćenja rezultata svake iteracije) da bi se sa manjom vrednošću dobio bolji rezultat. Izgleda da su uzrok tome uslovi i način izvršavanja operacije refleksije, ali su potrebna dalja testiranja i detaljniji rad na matematičkoj pozadini simpleks metode da bi se došlo do nekih konkretnih zaključaka.

Pri određivanju parametara orbita spektralno dvojnih zvezda, rekurzivna simpleks metoda se pokazala uspešnom. Nedostatak je, što je uopšte nedostatak i osnovne simpleks metode, nemogućnost određivanja intervala greške za parametar. Ako bi se za to koristila standardna devijacija sadržaja simpleks matrice pri poslednjoj iteraciji (sličan princip kao kod

metode najmanjih kvadrata), dobijaju se vrednosti reda veličine 10^{-10} , koje nemaju nikakvu naučnu vrednost.

Dobijene vrednosti za parametre orbita komponenata Aa i Ab zvezde H.D. 100018 generalno odgovaraju ranije dobijenim vrednostima Petrija i Betena. Doduše, pokazalo se da su moguće značajnije varijacije u elementima orbita, koje opet daju neznatne razlike u ukupnoj grešci, tj. merenja Petrija i Betena, koja su obrađivana, se mogu objasniti pomoću nekoliko sličnih krivulja sa podjednakom verovatnoćom.

Literatura

- [1] Agekyan T. A. 1962. *Kurs astrofiziki i zvezdonoj astronomii*. Moskva: Nauka.
- [2] Kallrath J., Linnell A. P. 1987. *Astrophysical Journal*, **313**: 346
- [3] Heintz W. D. 1971. *Double Stars*. London: D. Reidel.
- [4] Petrie R. M., Batten A. H. A 1970. Further Study of the Triple System H. D. 100018 (A.D.S. 8189). *Publications of the Dominion Astrophysical observatory*, volume XIII, No. 15, p. 383.

Milan Bogosavljević

Determination of the Orbital Elements of Spectroscopic Triple System HD 100018 (ADS 8189) using the Simplex Method

According to the values of radial velocities for a binary component of the triple system H.D. 100018 (ADS 8189), obtained by R.M Petrie and A.H. Batten – in the period between the year 1956 and 1968 (43 measurements) , four orbital parameters have been calculated. A combination of Lehman-Filhes graphical method and a simplex algorithm has been used. Furthermore, new algorithm consisting of two standard simplex algorithms has been developed and tested. It has been found that this new recursive simplex process is more reliable and yields better results than the standard simplex algorithm.

