

---

Ilija Anastasijević

## Numeričko ispitivanje plimskog zagrevanja Encelada

---

*Cilj ovog rada je implementacija modela plimske interakcije u Saturnovom sistemu, pre svega model plimske deformacije samog Saturna i njen uticaj na orbitalnu evoluciju njegovih satelita. Saturn i njegove plimske izbočine modelovani su kao materijalne tačke. Napisan je N-Body integrator za Saturnov sistem u kome je uzet u obzir efekat Saturnovih plimskih izbočina. Model je proveren na primeru ravnotežnog zagrevanja u Enceladu. Odstupanje numeričkih rezultata od analitičkih predviđanja iznosi oko 1%. Takođe je proveravan i sam integrator i potvrđeno je da očuvava energiju i moment impulsa sistema. Model opisan u ovom radu adekvatan je za kratkoročne integracije. Ipak, za ispitivanje dugoročne evolucije sistema neophodan je model plime u samim satelitima, što zahteva model unutrašnje strukture satelita.*

---

### Uvod

Plimska sila je prividna sila koja dovodi do deformacije nebeskog tela usled prisustva gradijenta (nejednagog intenziteta) gravitacionog polja nekog drugog tela u sistemu. Ovakva deformacija tela koja nastaje kao posledica dejstva plimske sile se naziva plimskom deformacijom. Plimske interakcije između tela Sunčevog sistema mogu biti uzrok energičnih vulkanskih aktivnosti čak i u odsustvu tektonike ploča. Zatim, plimska deformacija nebeskih tela odražava se i na njihovu međusobnu gravitacionu interakciju. Iako je ovaj efekat malog intenziteta, njegov uticaj postaje primetan na velikim vremenskim

skalama, od nekoliko miliona do nekoliko milijardi godina, u zavisnosti od karakteristika sistema. Takođe, uz adekvatan model plimske interakcije u sistemu, mogu se doneti zaključci o unutrašnjoj strukturi i okolnostima nastanka tela.

Na južnom polu Encelada plimsko zagrevanje, koje nastaje kao posledica gubitka energije tokom plimske deformacije, uzrokuje gejzire vodene pare i leda čija je snaga mnogo veća od klasičnih predviđanja (Porco *et al.* 2006). Mehanizam koji bi objasnio ovakvo zagrevanje mora da prođe „Mimas test” (Squyres *et al.* 1983). To znači da on ne sme da izazove znatno veće zagrevanje Saturnovog satelita Mimas. Mimas je sa stanovišta plimskog zagrevanja relativno inertan, imajući u vidu mirnu površinu i približno kružnu orbitu. Zagrevanje satelita zbog spin-orbit libracije, tj. oscilovanja strane Encelada okrenute prema Saturnu, (Wisdom 2004) predloženo je kao jedan od mehanizama. Međutim, predviđena libracija nije uočena. Lissauer i saradnici (1984) pokušali su da objasne plimsko zagrevanje Encelada preko 2 : 1 rezonance srednjeg kretanja sa Janusom, za koju je verovatno da se desila tek nekoliko desetina miliona godina u prošlosti. Međutim, procena za vrednost Janusove mase je kasnije smanjena, što dovodi i do manjeg plimskog zagrevanja (Peale 1999). Plimsko zagrevanje Encelada bi se takođe moglo objasniti ako se pretpostavi višeslojni viskoelastični model satelita (Ross i Schubert 1989), gde satelit ispoljava svojstva i viskoznih i elastičnih tela, tj. teži da se deformiše kao jedinstvena celina i da se vrati u prvobitni oblik nakon prestanka deformacije. Ovaj model ne obazire se na Mimas test, pa postoji mogućnost da bi ovakav model takođe

---

*Ilija Anastasijević (1999), Smederevo, Miloša Velikog 12/1, učenik 3. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu*

*MENTORI:*

*Andrija Kostić, student astrofizike na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu*

*Matija Ćuk, SETI Institut*

predvideo i znatno zagrevanje Mimas, što je u kontradikciji sa trenutnim posmatranjima.

Meyer i Wisdom (2007) su ispitivali plimsko zagrevanje Encelada u prisustvu njegove 2 : 1 rezonance srednjeg kretanja sa Dionom kao potencijalno objašnjenje za posmatranu vrednost zagrevanja. Vrednost koju su dobili, 1.1 GW, znatno je manja od posmatrane (13-18 GW, Lainey *et al.* 2012). Međutim, Lainey i saradnici fitovanjem astrometrijskih posmatranja dobijaju nove vrednosti disipacije energije unutar Saturna, i zaključuju da takvo zagrevanje Encelada ipak jeste jedno od mogućih objašnjenja.

Da bi se ovi modeli numerički proverili, neophodan je kompletan model plimske interakcije Saturnovog sistema. Cilj ovog rada je implementacija modela plimske deformacije Saturna, kao i provera na primeru ravnotežnog zagrevanja Encelada. Ovo je prvi korak u formiranju celog modela, o kome će biti reči u diskusiji.

## Model

### Plimska deformacija

U narednom delu razmatran je uticaj plimske sile na planetu oko koje orbitira satelit. Analogan proces dešava se i na satelitu, pod uticajem planete. Usled uticaja plimske sile satelita na planetu, dolazi do stvaranja dve plimske izbočine na površini planete. Deformacija oblika planete uzrokuje trenje između slojeva različite gustine unutar planete, zbog čega se iz sistema gubi energija u vidu toplote. Takođe, trenje za posledicu ima i kašnjenje u reakciji površine planete na prinudnu silu sa satelita, zbog čega je osa plimskih izbočina pomerena od pravca ka satelitu za neki ugao (slika 1). Ovime se može zaključiti da se sam površinski sloj planete ponaša kao prinudni harmonijski oscilator, čija jednačina glasi (Murray i Dermott 1999):

$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + F_0 \cos \omega t,$$

gde je  $x$  radijalni pomeraj oscilatora iz ravnotežnog položaja,  $m$  masa oscilatora,  $k$  koeficijent elastičnosti oscilatora,  $\beta$  koeficijent prigušenja oscilatora koji predstavlja meru gubitka energije tokom oscilovanja,  $F_0$  amplituda prinudne sile a  $\omega$  njena ugaona frekvencija. U ovom slučaju, oscilatorno kretanje vrši tačka na površini planete,

a prinudna sila je gravitaciona sila satelita, čija je faza uslovljena orbitiranjem satelita oko planete. Ovu jednačinu nakon deljenja sa  $m$  možemo napisati u obliku:

$$\ddot{x} = -\omega_0 x - \frac{1}{\tau} \dot{x} + \frac{F_0}{m} \cos \omega t,$$

gde je  $\omega_0$  ugaona frekvencija oscilatora prilikom slobodnih oscilacija, a  $\tau$  vremenska skala prigušenja. Pretpostavkom  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$  dobijamo izraz za amplitudu oscilatora  $A$ :

$$A = \frac{F_0}{m} \cdot [(\omega_0^2 + \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2]^{-\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Fazni pomeraj  $\varphi$  (ugao između ose koja spaja plimske izbočine i satelit; videti sliku 1) dat je jednačinom:

$$\sin \varphi = -\frac{\omega}{\tau} \cdot [(\omega_0^2 + \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

Iz jednačina (1) i (2) može se zaključiti da amplituda oscilacija zavisi od amplitude prinudne sile i njene frekvencije, dok fazni pomeraj zavisi samo od frekvencije prinudne sile.  $\varphi$  je negativno ( $-\pi < \varphi \leq 0$ ) za svako  $\omega$  (Baierlein 1983; Feynman *et al.* 1963), odakle sledi da reakcija površine planete uvek kasni za delovanjem plimske sile.

Fazni pomeraj  $\varphi$  možemo povezati sa faktorom dobrote  $Q$ , koji predstavlja odnos maksimalne i izgubljene energije tokom jedne oscilacije. Faktor dobrote definisan je sledećom jednačinom:

$$Q = \frac{2\pi E_0}{\Delta E}, \quad (3)$$

gde je  $E_0$  maksimalna energija tokom oscilacije, a  $\Delta E$  izgubljena energija tokom oscilacije. Iz jednačine (1) preko definicije rada povratne sile dobija se sledeći izraz za  $E_0$ :

$$\begin{aligned} E_0 &= \int_0^A kx dx = \frac{1}{2} \omega_0^2 A^2 = \\ &= \frac{1}{2} \omega_0^2 \frac{F_0^2}{m} \cdot [(\omega_0^2 + \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2]^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Rad sile otpora koja izaziva prigušenje na pomeraju  $\delta x$  u vremenu  $\delta t$  je  $\beta \dot{x} \delta x$ , pa je stopa gubitka energije  $\dot{E} = -\beta \dot{x}^2$ . Zamenom  $x$  u tom izrazu

dobija se  $\langle \dot{E} \rangle = \frac{1}{2} \beta A^2 \omega^2$ , srednja stopa gubitka energije. Gubitak energije u jednom ciklusu oscilatora onda se dobija iz sledeće jednačine:

$$\Delta E = \langle \dot{E} \rangle \frac{2\pi}{\omega} = \pi \frac{F_0^2}{m} \frac{\omega}{\tau} \cdot [(\omega_0^2 + \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2]^{-1}. \quad (5)$$

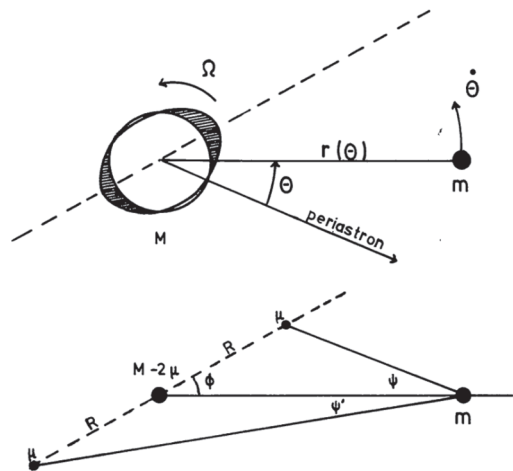
Ako važe uslovi  $\omega_0^2 \gg \omega^2 \gg \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2$ , tj. prigušene

nje oscilatora je slabo i oscilator nije blizu rezonance, jednačine (2)-(5) mogu se uprostiti, i onda se zamenom jednačina (4) i (5) u jednačinu (3) dobija, iz jednačine (2), da je:

$$\sin \varphi = -\frac{1}{Q}. \quad (6)$$

Iz ovog modela sledi da će satelit koji orbitira sa srednjim kretanjem  $n$  oko planete čija je ugaona brzina rotacije oko svoje ose  $\Omega$  izazivati plimske oscilacije sa frekvencijom prinudne sile  $\omega = 2(\Omega - n)$ , što predstavlja relativnu ugaonu brzinu satelita u odnosu na tačku na površini planete koja je uzeta za oscilator (za ilustraciju konfiguracije sistema pogledati sliku 1). Ako je  $\omega \neq 0$ , tj.  $\omega \neq n$ , rad momenta sile plimskih izbočina planete na satelit i momenta sile satelita na plimske izbočine planete neće biti jednaki. Ovo dovodi do promene orbitalne energije satelita, to jest  $\dot{E} = \Gamma(\omega - n)$ , gde je  $\Gamma$  rezultujući moment sile, što izaziva orbitalnu evoluciju kod satelita. Pošto se plima na satelitu ponaša isto kao i plima na planeti, model prinudnog oscilatora možemo primeniti i na satelitu. U tom slučaju, planeta je ta koja daje prinudnu silu u oscilatoru. Dejstvo planete na plimske izbočine satelita usporava njegovu rotaciju, pa će se period rotacije satelita vremenom približavati njegovom orbitalnom periodu. U ovom radu, plimska deformacija satelita nije modelirana zbog nepoznate unutrašnje strukture satelita.

Umesto računanja oblika planete koji je nastao deformacijom i računanja gravitacionog potencijala preko kvadrupolnog razvoja, možemo aproksimirati planetu i plimske izbočine kao tri materijalne tačke mase  $M - 2\mu$ ,  $\mu$  i  $\mu$  (Hut 1981, slika 1). Ukupna sila koja deluje na satelit u orbiti plimski deformisane planete je onda zbir gravitacionih uticaja centralne mase i dve plimske izbočine:



Slika 1. Ilustracija modela plimske deformacije planete. Plimske izbočke su aproksimirane materijalnim tačkama. Konfiguracija masa na nižoj slici, kao i mase, predstavlja sistem čiji je potencijal ekvivalentan spoljašnjem potencijalu plimsko deformisane planete u kvadrupolnoj aproksimaciji (Hut 1981).

Figure 1. An illustration of the model for planetary tides. Tidal bulges are approximated with point particles. Mass configuration is shown in the lower figure. The potential of this configuration is constructed to have the same external potential as the potential of a deformed planet in quadrupole moment approximation (Hut 1981).

$$\begin{aligned} \vec{F} = & -\frac{\gamma(M-2\mu)m}{r^2} \hat{r} - \\ & -\frac{\gamma\mu m}{(r^2 + R^2 + 2rR \cos \varphi)^{\frac{1}{2}}} (\cos \psi \hat{r} - \sin \psi \hat{\theta}) + \\ & +\frac{\gamma\mu m}{(r^2 + R^2 + 2rR \cos \varphi)^{\frac{1}{2}}} (\cos \psi \hat{r} - \sin \psi \hat{\theta}), \end{aligned}$$

gde je  $M$  masa planete,  $m$  masa satelita,  $r$  udaljenost između planete i satelita, a  $R$  srednji radijus planete. Masa plimske izbočine  $\mu$  data je jednačinom:

$$\mu(t) = \frac{1}{2} k_2 m \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left(1 + 3 \frac{\dot{r}}{r} \tau\right), \quad (7)$$

gde je  $\tau = \frac{T}{2\pi} \arctan \frac{1}{Q}$  (Lainey *et al.* 2012) vremensko kašnjenje plimske izbočine za satelitom, a  $k_2$  Lavov broj planete, koji predstavlja apstrakciju unutrašnje strukture planete. Parametar  $T$  predstavlja period plimskih oscilacija na planeti. U slučaju Saturna, kao što je gore pomenuto,  $T = \frac{\pi}{\Omega - n}$ . Uglovi  $\psi$  i  $\psi'$  mogu se dobiti primenom sinusne i kosinusne teoreme (slika 1). Ti uglovi dati su sledećim jednačinama:

$$\sin \psi = \frac{R \sin \phi}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \phi)^{\frac{1}{2}}}, \quad (8)$$

$$\sin \psi' = \frac{R \sin \phi}{(r^2 + R^2 + 2rR \cos \phi)^{\frac{1}{2}}}. \quad (9)$$

Ovakav model adekvatan je za opisivanje sistema gde je ravnotežna plima dominantna nad dinamičkom, tj. gde se najveći gubitak energije ostvaruje kroz samu promenu oblika tela, a ne kroz međusobne interakcije slojeva različite elastičnosti. Pošto se u ovom radu pretpostavlja ravnotežna plima na Saturnu, ovaj model je adekvatan za potrebe ovog istraživanja. Jednačine (7)-(9) mogu se objediniti u jedan izraz (Leconte *et al.* 2010), što je i urađeno u ovom radu radi jednostavnosti računa:

$$\begin{aligned} \vec{F} = & -\frac{\gamma M m}{r^2} \hat{r} - \\ & -3 \frac{\gamma k_2 m^2 R^5}{r^7} \left( 1 + 3 \frac{\dot{r}}{r} \tau \right) \hat{r} + \\ & + 3 \frac{\gamma k_2 m^2 R^5}{r^7} \tau (\vec{\omega}_p - \vec{n}) \times \hat{r}, \end{aligned} \quad (10)$$

gde su  $\vec{\omega}_p$  i  $\vec{n}$  vektori ugaone brzine planete, odnosno srednjeg kretanja satelita.

## Radijalna plima i ravnotežni ekscentricitet

Pre nastavka diskusije, neophodno je ukratko proći kroz teoriju kretanja tela u polju centralne sile. Jednačina kretanja u polju centralne sile data je jednačinom:

$$\vec{F} = m \ddot{\vec{r}} = -\nabla F_{\text{eff}}, \quad (11)$$

gde je  $m$  masa tela,  $r$  njegov položaj, a  $V_{\text{eff}}$  efektivni potencijal sile, koji predstavlja zbir centrifugalnog i centralnog potencijala. Ova se jednačina može napisati u polarnim koordinatama:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{dV}{dr} + \frac{ml^2}{r^3} \hat{r}, \quad (12)$$

gde je  $l$  moment impulsa tela koje se kreće u polju centralne sile po jedinici mase. Pošto je sistem koji se razmatra dvočestični (na primer, planeta i jedan njen satelit), moment impulsa sistema je održan, te je opravdano korišćenje polarnog koordinatnog sistema. Uvođenjem smene  $u = \frac{1}{r}$  u jednačinu (12) i smene diferenciranja po  $\theta$  (polarni ugao) umesto  $t$ , jednačina (11), uz izraz za silu iz jednačine (12), dobija oblik:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{1}{ml^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right), \quad (13)$$

Za gravitacionu silu centralni potencijal ima oblik  $V = -\frac{km}{r}$ , gde je  $k = \gamma M$ . Za ovaj potencijal jednačina (13) ima oblik:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{l^2}.$$

Rešavanjem ove jednačine dobijamo jednačinu orbite u polarnim koordinatama:

$$r = \frac{r_0}{e \cos \theta + 1}, \quad (14)$$

gde je  $r_0 = \frac{l^2}{k}$ , a  $e = \frac{Al^2}{k}$ . Orbitalna energija tela u polarnom koordinatnom sistemu data je formulom:

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - V(r).$$

Korišćenjem izraza imamo:

$$E = \frac{1}{2} m \left( \frac{dr}{d\theta} \right)^2 \frac{l^2}{r^4} + \frac{ml^2}{2} r^2 - \frac{km}{r}. \quad (15)$$

Ako zamenimo u jednačinu (15) izvod jednačine (14) po  $\theta$ , dobijamo:

$$E = \frac{mk^2}{2l^2} (e^2 - 1). \quad (16)$$

Kao što je u prethodnom odeljku pomenuto, plimsko zagrevanje je posledica deformacije tela

usled plimske sile. U slučaju satelita u kružnoj sinhronoj orbiti, kružna učestalost plimske sile  $\omega = \Omega - n = 0$ , pa više nema promene oblika površine satelita ni plimskog zagrevanja u satelitu. Međutim, ako je orbita satelita ekscentrična, zbog promenljive udaljenosti između satelita i planete dolazi do varijacije u amplitudi plimske sile, što uzrokuje rastezanje satelita ka planeti i plimsko zagrevanje satelita. Ova pojava naziva se radijalna plima. Pošto je jedina veličina u jednačini (16) koja se ne održava ekscentricitet satelita  $e$ , disipacija energije usled radijalne plime kod satelita ispoljava se kao smanjenje ekscentriciteta, odnosno cirkularizacija orbite satelita.

Naime, stopu zagrevanja satelita usled radijalne plime možemo izračunati preko održanja momenta impulsa (Murray i Dermott 1999). Ukupan moment impulsa satelita možemo napisati kao zbir orbitalnog i rotacionog momenta impulsa. Rotacioni moment impulsa možemo zanemariti jer je mnogo manjeg intenziteta od orbitalnog momenta impulsa. Iz jednačine (16) možemo izraziti ekscentricitet:

$$e^2 = 1 + \frac{2El^4}{mk^4}. \quad (17)$$

U sistemu  $N$  tela,  $l$  (orbitalni moment impulsa jednog od  $N$  satelita u odnosu na planetu) nije konstantna veličina zbog perturbacije orbite od strane drugih tela. Međutim, u ovom slučaju od interesa je samo radijalna plima i njen efekat na ekscentricitet, pa se uzima da je  $l = 0$ . Sledi, uz pretpostavku da disipacija umanjuje ukupnu mehaničku energiju (videti diskusiju ispod jednačine (6)), primenom vremenskog izvoda na jednačinu (17) izraz za promenu ekscentriciteta pod uticajem radijalne plime u satelitu:

$$\dot{e} = -\frac{\dot{E}}{2eE}(1-e^2). \quad (18)$$

Ako je satelit u rezonanci srednjeg kretanja sa drugim satelitom, dolazi do pobuđivanja ekscentriciteta satelita zbog njihovog međusobnog gravitacionog dejstva. Ukoliko su srednji periodi kretanja dva satelita celobrojni ili racionalni umnošci jedan drugog, sateliti će jako često dolaziti u istovetnu međusobnu konfiguraciju. Ovo uzrokuje pojačavanje njihovog međusobnog dejstva, povećava se orbitalni moment unutrašnjeg satelita, kao i njegova orbitalna energija, te dolazi i

do pobuđivanja ekscentriciteta unutrašnjeg satelita u sistemu (videti jednačinu (17)). Ova dva efekta dolaze u ravnotežu pri nekom ekscentricitetu  $e \neq 0$ , koji se naziva ravnotežni ekscentricitet. Zagrevanje satelita u ovoj konfiguraciji naziva se ravnotežno zagrevanje.

Ravnotežno zagrevanje satelita u prethodno pomenutom sistemu od dva satelita može se izračunati nezavisno od njegove unutrašnje strukture korišćenjem zakona održanja energije i momenta impulsa sistema (Lissauer *et al.* 1984). Rad koji ulože plimske izbočine na satelite delom se izgubi kroz plimsko zagrevanje  $H$ , a ostatak odlazi na promenu orbitalne energije sistema:

$$n_0 T_0 + n_1 T_1 = \frac{d}{dT}(E_0 + E_1) + H, \quad (19)$$

gde su  $n_0$  i  $n_1$  srednja kretanja prvog i drugog satelita, a  $T_0$  i  $T_1$  momenti sila plimskih izbočina planete na satelite. Za rezonancu srednjeg kretanja  $j : (j-1)$ , gde je  $j$  mali prirodan broj (odnosno rezonanca je jaka) možemo uvesti rezonantni parametar  $\delta = jn_1 + (1-j)n_0$ . U okolini rezonance ovaj parametar je blizu nule, pa zaključujemo da je  $jn_1 = (j-1)n_0$ .

Odatle sledi da je:

$$\frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dt} = \frac{1}{n_1} \frac{dn_1}{dt}. \quad (20)$$

Koristeći činjenicu da je  $n^2 \sim \frac{1}{a^3}$  i da je

$$\frac{dn}{dt} \sim a^{-\frac{5}{2}} \frac{da}{dt},$$

gde je  $a$  velika poluosa orbite, iz prethodne jednačine dobijamo:

$$\frac{1}{a_0} \frac{da_0}{dt} = \frac{1}{a_1} \frac{da_1}{dt}. \quad (21)$$

Primenom jednačina (19) i (21), zajedno sa definicijom orbitalnog momenta impulsa i zakona održanja momenta impulsa, dobijamo izraz za ukupno ravnotežno zagrevanje dva satelita u ravnoteži:

$$H = \frac{n_0 T_0}{(1-e_0^2)^2} + \frac{n_1 T_1}{(1-e_1^2)^2} - \frac{T_0 + T_1}{L_0 + L_1} \left( \frac{\gamma M m_0}{a_0} + \frac{\gamma M m_1}{a_1} \right). \quad (22)$$

Pošto momenti sila zavise od amplitude plimskih oscilacija planete o kojima je bilo reči u prethodnom odeljku (izazvani su tangencijalnom komponentom sile date jednačinom (10)), ovo je odlična provera za model plimske deformacije, uz poznavanje analitičkog izraza za momente sila (jednačina (16) u radu Meyer i Wisdom 2007):

$$T = \frac{3}{2} \frac{\gamma m^2 R_S^5 k_{2S}}{a^6 Q_S}.$$

## Integrator

Za opisani plimski model napisan je N-body simplektički Leapfrog integrator. U integraciju su uključeni veći Saturnovi sateliti: Mimas, Encelad, Tetis, Diona, Rea i Titan, od kojih su Encelad i Diona u 2 : 1 rezonanci srednjeg kretanja i za njih važi jednačina (22). Pritom je pretpostavka da se svo zagrevanje u sistemu odvija na Enceladu, jer je iz posmatranja poznato da je Diona mnogo manje geološki aktivna. Radi testiranja modela, vršeno je 40 integracija jedne Enceladove orbite, koja traje 33 sata, za 40 različitih vrednosti faktora dobrote Saturna  $Q_S$  u rasponu od  $Q_S = 1000$  do  $Q_S = 4 \times 10^5$ , što pokriva parametarski prostor za  $Q_S$  koji se koristi u literaturi (Lainey *et al.* 2012, Meyer i Wisdom 2007). Takođe je vršena i duža integracija u trajanju od 10 godina, kako bi se ispitalo ponašanje orbitalnih elemenata satelita pod gravitacionim uticajem plimskih izbočina Saturna.

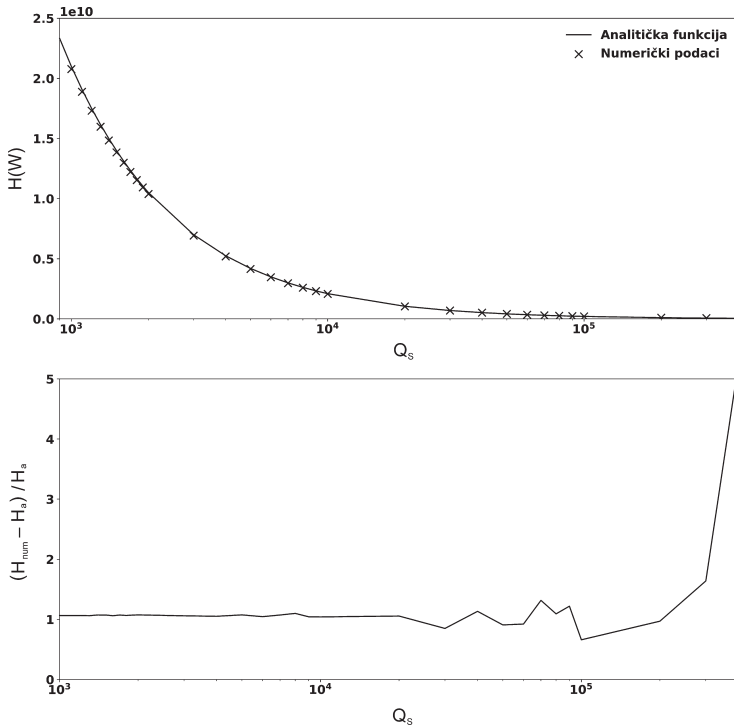
Prilikom integracije uračunati su efekti Saturnovih plimskih izbočina na satelite i međusobna gravitaciona interakcija satelita. Zanemaren je efekat plima u samom satelitu na orbite satelita, zbog nedostatka modela unutrašnjosti satelita. U slučaju Encelada, kada se u jednačinu (18) kao stopa promene energije zameni dobijena vrednost za stopu ravnotežnog zagrevanja iz jednačine (22), dobije se promena ekscentriciteta koja iznosi  $\dot{e} = 8.2 \times 10^{-9} \text{ god}^{-1}$  za trenutnu konfiguraciju sistema, što je zanemarljivo na vremenskom intervalu od jedne orbite. Ipak, ovaj efekat se mora uračunati prilikom dugoročnih integracija, naročito ako se uzme u obzir da radijalna plima u satelitu ima više redova veličina veći uticaj na evoluciju sistema nego moment sile od plimskih izbočina. Takođe su zanemareni perturbirani van Saturnovog sistema (pre svega Jupiter) i relativistički efekti.

Osim provere na primeru ravnotežnog zagrevanja Encelada, urađene su i opštije provere integratora. Pošto su zanemareni efekti disipacije na orbitu, simplektički integrator će održavati energiju i moment impulsa.

## Rezultati i diskusija

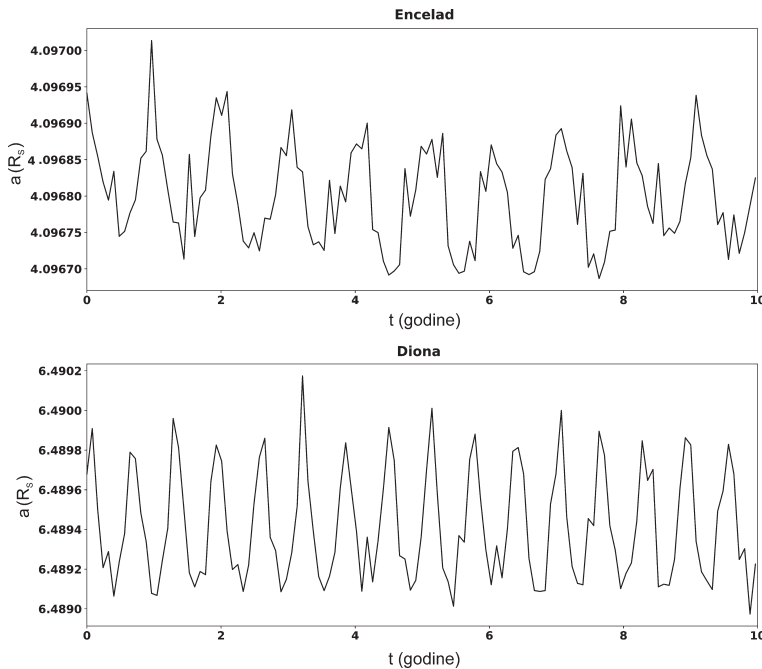
Dobijene vrednosti za ravnotežno zagrevanje Encelada kreću se u opsegu od 20 GW za  $Q_S = 1000$ , do 57 MW za  $Q_S = 4 \times 10^5$ , sa relativnom greškom od oko 1% u odnosu na analitičke vrednosti iz Meyer i Wisdom (2007) i Lainey i saradnici (2012) (videti sliku 2). Greška ubrzano raste u režimu jako velikih vrednosti  $Q_S \geq 10^5$ , gde je disipacija u Saturnu veoma slaba i ugao između ose plimskih izbočina i pravca ka satelitima je veoma mali. Zbog toga dolazi i do veće greške pri računanju momenta sile plimske izbočine Saturna na satelite, od kojih zavisi i plimsko zagrevanje Encelada. Poređenja radi, Lainey i saradnici daju procenu  $k_{2S}/Q_S = (2.3 \pm 0.7) \times 10^{-4}$ , što zajedno sa ovde korišćenom vrednošću  $k_{2S} = 0.341$  (Gavrilov i Zharkov 1977) daje opseg  $1130 \leq Q_S \leq 2130$ , dva reda veličine manje od gore pomenute vrednosti.

Na slikama 3, 4, i 5 prikazani su orbitalni elementi Encelada i Dione koji su dobijeni integracijom sistema u trajanju od 10 godina. Uključivanje ostalih satelita u integraciju nije imalo značajan efekat na sistem, zbog odsustva međusobnih orbitalnih rezonanci i kratkog vremena integracije. Velike poluose Encelada i Dione (slika 3) nisu se bitno promenile, zbog kratkog vremena integracije. Ipak, očekuje se da će prilikom duže integracije, zbog dejstva momenta sile plimskih izbočina na Saturnu doći do njenog povećanja. Sa druge strane, zbog cirkularizacije orbite smanjivaće se orbitalna energija, što povlači i smanjivanje velike poluose. Na grafiku ekscentriciteta Encelada (slika 4) može se uočiti skok od 23% usled rezonance srednjeg kretanja sa Dionom. Diona pobuđuje orbitalni moment impulsa Encelada, što prema jednačini (17) dovodi do povećanja ekscentriciteta. Na grafiku inklinacije Encelada i Dione (slika 5) primetan je rast inklinacije Encelada i opadanje inklinacije Dione usled uzajamnog gravitacionog delovanja i nepoklapanja ravni orbita u odnosu na ostale satelite u sistemu.



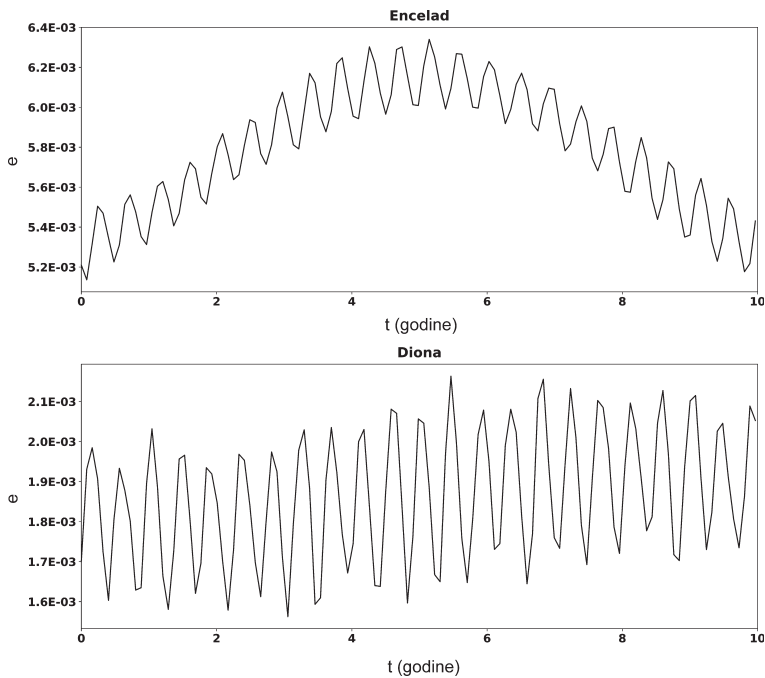
Slika 2. Grafik zavisnosti stope zagrevanja  $H$  Encelada od faktora dobrote Saturna  $Q_s$ . Donji grafik predstavlja relativnu grešku numeričkih podataka u procentima.

Figure 2. Plot of Enceladus heating rate in relation to Saturn's quality factor  $Q_s$ . The solid line represents analytical predictions, while the crosses are numerical data points. The bottom plot represents the relative error of numerical data in per cents.



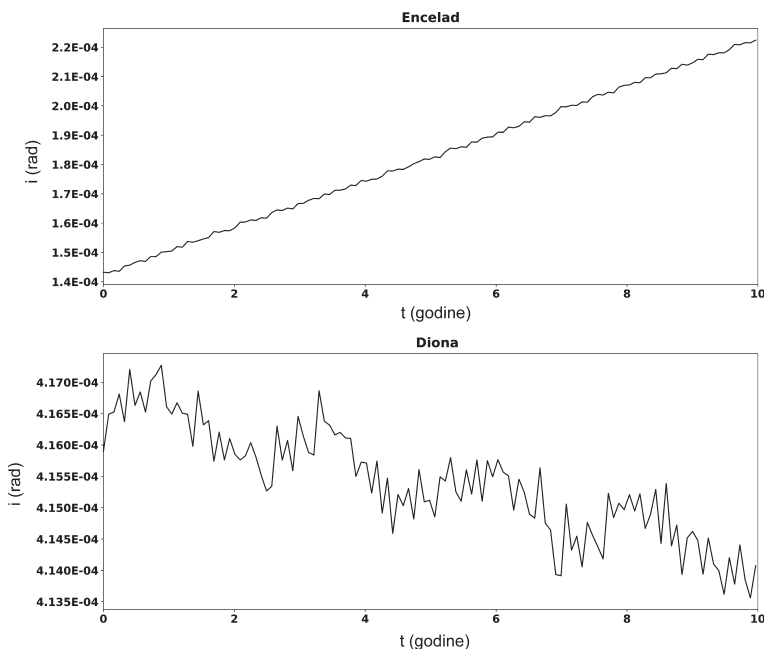
Slika 3. Prikaz oskulatornih (trenutnih) velikih poluosa orbita Encelada i Dione u zavisnosti od vremena. Ne može se uočiti značajna promena velike poluose ovih satelita na ovom periodu integracije orbita. Ono što bi se moglo očekivati tokom duže integracije je porast velike poluose Encelada usled delovanja plimskih izbočina Saturna, a smanjenje usled disipacije zbog plimskog zagrevanja.

Figure 3. Osculating semimajor axes of the orbits of Enceladus and Dione in time (years). No significant change could be seen, because of the short integration period. In the long run it is expected that the semimajor axis of Enceladus would increase due to tidal bulges on Saturn and decrease due to tidal heating in Enceladus.



Slika 4. Prikaz oskulatornog ekscentriciteta Encelada i Dione u zavisnosti od vremena. Može se uočiti jasan skok ekscentriciteta Encelada, što je posledica prisustva rezonance sa Dionom. Rezonanca pobuđuje orbitalni moment impulsa, što zauzvrat pobuđuje i ekscentricitet (jednačina 22).

Figure 4. Depiction of osculating orbital eccentricities of Enceladus and Dione in time (in years). It can be noticed that the Enceladus eccentricity has a noticeable peak which is a consequence of the resonance with Dione. As can be seen from equation 22, due to the increase in orbital angular momentum, the orbital eccentricity would also increase.



Slika 5. Oskulatorne orbitalne inklinacije Encelada i Dione u zavisnosti od vremena. Vidi se jasno povećanje, odnosno smanjenje inklinacije, Encelada, odnosno Dione, zbog uticaja ostalih satelita u sistemu, koji nisu u istoj orbitalnoj ravni kao ova dva satelita.

Figure 5. Osculating orbital inclinations of Enceladus and Dione in time (in years). A clear increase, i.e. decrease, in the inclinations of Enceladus and Dione, respectively, can be seen. This is a consequence of the gravitational pull of the rest of the satellites that have a different orbital plane than these two satellites.



## Zaključak

U ovom radu sastavljen je numerički model plimske deformacije Saturna. Plimska deformacija može se modelovati prinudnim harmonijskim oscilatorom, gde je oscilator tačka na površini planete (Murray i Dermott 1999). Rezultujuće plimske izbočine na Saturnu imaju gravitaciono dejstvo na satelit koji ih izaziva. Radi lakšeg računanja momenta sile Saturna na satelite, plimske izbočine mogu se modelovati materijalnim tačkama (Hut 1981). Model je proveren na primeru ravnotežnog zagrevanja Encelada.

Za računanje plimskog zagrevanja satelita, neophodno je znanje o njegovoj unutrašnjoj strukturi. Međutim, u slučaju Encelada može se iskoristiti njegova 2 : 1 rezonanca srednjeg kretanja sa Dionom. Na taj način plimsko zagrevanje Encelada može da se izračuna kao funkcija momenata sila Saturnovih plimskih izbočina na Encelad i Dionu. Ovo opravdava i korišćenje plimskog zagrevanja Encelada kao proveru za model deformacije Saturna.

Model plimske deformacije Saturna opisan u ovom radu pokazao se kao adekvatan tokom testiranja u namenski napisanom N-Body Leapfrog integratoru. Korišćenjem modela numerički su reprodukovane vrednosti plimskog zagrevanja Saturnovog satelita Encelada iz rada Meyer i Wisdom (2007) i Lainey *et al.* (2012) sa relativnom greškom od 1%. Takođe, ustanovljeno je da je uticaj spoljašnjih satelita u Saturnovom sistemu od male važnosti za dinamiku unutrašnjih satelita, Encelada i Dione.

Međutim, ovakav model plimske deformacije nije dovoljan za ispitivanje plimske interakcije u sistemu. Kod dugoročnih integracija, efekat plime na satelitima na njihove orbitalne elemente više nije zanemarljiv. Zbog toga je neophodan model unutrašnje strukture satelita, što bi upotpunilo model plimske interakcije u sistemu. Jedna od mogućnosti je modelovanje unutrašnje strukture Encelada politropom, odakle se može dobiti profil gustine satelita (Horedt 2004). Iz profila gustine je kasnije moguće izračunati vrednost parametra  $k_2$  za Encelad. Ako je pri tom poznat i faktor dobrote  $Q$ , može se precizno odrediti ponašanje satelita tokom plimske interakcije. Analogno, analizom uticaja Encelada na dinamiku svemirske letelice koja vrši bliski prolaz,

mogu se dobiti procene za moment inercije satelita iz kojeg se potom mogu ograničiti modeli unutrašnje strukture, a samim tim i procene za  $k_2$ . Uz upotrebu već poznatog odnosa  $k_2/Q$ , može se proceniti i faktor dobrote  $Q$ , a samim tim i dinamika plimskih interakcija.

**Zahvalnost.** Zahvalio bih se Matiji Ćuku, istraživaču na SETI institutu, za predloženu literaturu i korisne savete prilikom izrade projekta, kao i Vladimiru Đošoviću, saradniku u nastavi katedre za astronomiju na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu na pomoći prilikom implementacije koda.

## Literatura

- Baierlein R. 1983. *Newtonian Dynamics*. New York: McGraw-Hill
- Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M. 1963. *The Feynman Lectures on Physics*, Vol. 1. Reading: Addison-Wesley
- Gavrilov S. V., Zharkov V. N. 1977. Love numbers of the giant planets. *Icarus*, **32**: 443.
- Horedt G. P. 2004. *Polytropes: Applications in astrophysics and related fields*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, Astrophysics and space science library, vol. 306.
- Hut P. 1981. Tidal Evolution in Close Binary Systems. *Astronomy and Astrophysics*, **99**: 126.
- Lainey V., Karatekin Ö., Desmars J., Charnoz S., Arlot J.-E., Emelyanov N., Le Poncin-Lafitte C., Mathis S., Remus F., Tobie G., Zahn J.-P. 2012. Strong Tidal Dissipation in Saturn and Constraints on Enceladus' Thermal State from Astrometry. *The Astrophysical Journal*, **752**: 19.
- Leconte J., Chabrier G., Baraffe I., Levrard B. 2010. Is tidal heating sufficient to explain bloated exoplanets? Consistent calculations accounting for finite initial eccentricity. *Astronomy and Astrophysics*, **516**: 13.
- Lissauer J., Peale S. J., Cuzzi J. 1984. Ring torque on Janus and the melting of Enceladus. *Icarus*, **58**: 159.
- Meyer J., Wisdom J. 2007. Tidal heating in Enceladus. *Icarus*, 188: 535.
- Murray C. D., Dermott S. F. 1999. *Solar System Dynamics*. New York: Cambridge University Press

Peale S. J. 1999. Origin and evolution of natural satellites. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 1999, **37**: 533.

Porco C. C., Helfenstein P., Thomas P. C., Ingersoll A. P., Wisdom J., West R., Neukum G., Denk T., Wagner R., Roatsch T., Kieffer S., 2006. Cassini observes the active south pole of Enceladus. *Science*, 311(5766): 1393-1401.

Squyres S. W., Reynolds R. T., Cassen P. M., Peale S. J. 1983. The evolution of Enceladus. *Icarus*, **53**: 319.

Ross M. N., Schubert G. 1989. Viscoelastic models of tidal heating in Enceladus. *Icarus*, **78**: 90.

Wisdom J. 2004. Spin-orbit secondary resonance dynamics of Enceladus. *The Astronomical Journal*, **128**: 484.

---

*Ilija Anastasijević*

## Numerical Analysis of Tidal Heating in Enceladus

This paper aims to implement a model of tidal interaction in the Saturnian system. In particular, the tidal deformation of Saturn and its influence on the orbital evolution of its satellites is modeled. Saturn and its tidal bulges are approximated as a set of point masses. An N-Body code was written for the system taking into account Saturn's tidal deformation. The model was tested on the example of equilibrium heating in Enceladus. Numerical results deviate from analytical predictions with an error of 1%. The integrator itself was also tested and it is shown to conserve energy and angular momentum. The model in its current state is suitable for short-term integrations of the system. However, for long term evolution, it is also necessary to model the tides in the satellites and their effect on satellite orbital elements. That would require a model of the satellites internal structure, a step to be taken in future work. 