

Modelovanje i analiza krive sjaja cefeide sa egzoplanetom

Numerički je modelovana kriva sjaja cefeide sa tranzitirajućom egzoplanetom u cilju ispitivanja mogućnosti detektovanja egzoplanete tranzitom. Mogućnost detektovanja je ispitana u zavisnosti od poluprečnika planete i velike poluose orbite planete, jer najviše utiču na amplitudu i period tranzita. Statična zvezda modelovana je Edingtonovim modelom. Linearizacijom jednačina strukture dobijena je linearna adijabatska talasna jednačina, koja uz opis statične zvezde daje fizički opis pulsirajuće cefeide. Koristeći rešenje statične zvezde opisan je parcijalno jonizovani sloj He, čije kontrakcije daju periodične promene luminoznosti cefeide. Na kompozitnu krivu sjaja sistema cefeide i egzoplanete dodate su greške radi dobijanja realnije krive sjaja. Kvalitet signala tranzita opisan je faktorom Q , koji je definisan kao odnos amplitude signala i standardne devijacije okolnog šuma. Analiza izvršena na primeru zvezde δ Cephei pokazuje da planete radijusa većeg od ~ 0.7 radijusa Jupitera zadovoljavaju granicu detektabilnosti od 3 standardne devijacije. Pokazano je da se, sa sigurnošću ≥ 3 standardne devijacije, metodom tranzita može detektovati $\sim 40\%$ (20%) do sada (tranzitom) detektovanih egzoplaneta, ako bi one orbitirale oko δ Cephei.

Uvod

Pulsirajuće zvezde su zvezde čiji se sjaj i ostale fizičke karakteristike na površini menjaju približno periodično kroz vreme. Mogu se podeliti na osnovu dužine perioda pulsacija: RR Lyrae (između 1 i 24 h), Cefeide (između 1 i 50 dana) i Miride (između 80 i 1000 dana) (Vukićević-Karabin i Atanacković-Vukmanović 2004). One su najčešće džinovi i superdžinovi. Njihova nestabilnost se ogleda samo u slojevima blizu površine, u suprotnom ne bi došlo do pulsacija. Promena radijusa, luminoznosti i temperature ovih zvezda objašnjava se njihovim sažimanjem i širenjem.

Kao objašnjenje pulsacija prihvaćen je kapa-mehanizam. One se objašnjavaju time što zvezda nije u hidrostatičkoj ravnoteži. Kad se zvezda širi,

Nikola Savić (1999),
Zemun, Beograd,
Ugrinovački put 10.
deo 33, učenik 3.
razreda Matematičke
gimnazije u Beogradu

Božidar Obradović
(1998), Beograd, Sime
Igumanova 49, učenik
4. razreda
Matematičke gimnazije
u Beogradu

Filip Herček (2000),
Pivnice, Štefanikova
115, učenik 2. razreda
Gimnazije „J. J.
Zmaj” u Novom Sadu

MENTOR:
Dušan Vukadinović,
Istraživačka stanica
Petnica

sila pritiska gasa i zračenja (ukupni pritisak) opada brže od gravitacione sile. U nekom trenutku će gravitacija nadvladati ukupan pritisak pa će zvezda početi da se sažima. Dok se zvezda sažima, gravitaciona sila sporije raste od sile pritiska. Kada sila pritiska nadvlada gravitacionu, zvezda kreće ponovo da se širi (*ibid.*). Ovo oscilovanje bi vremenom prestalo usled energetskih gubitaka (između ostalog, usled disipacije), da ne postoji mehanizam koji ga podržava. Za održavanje pulsacija odgovoran je parcijalno jonizovani sloj helijuma He^+ u blizini površine zvezde (*ibid.*). Prilikom sažimanja, zagreva se sloj He^+ , pa dolazi do jonizacije $\text{He}^+ \rightarrow e + \text{He}^{++}$ i povećava se neprozračnost. Zbog toga energija zračenja sporije napušta sloj, pa se on zagreva, i dolazi do širenja. Prilikom širenja opada gustina sloja, dolazi do hlađenja i rekombinacije $\text{He}^{++} + e \rightarrow \text{He}^+$. Smanjuje se neprozračnost, pa se energija brže otpušta, i sloj se hladi, i potom dolazi do ponovnog sažimanja.

Cefeide karakteriše izrazita pravilnost njihovih pulsacija i veliki sjaj (mala apsolutna magnituda). Kako se period cefeide može relativno jednostavno izmeriti sa velikom tačnošću, na osnovu empirijske relacije period-sjaj, može se odrediti njena apsolutna magnituda. Uz prividnu magnitudu dobijenu posmatranjima, na osnovu Pogsonovog zakona može se odrediti udaljenost cefeide. Kako su one crveni džinovi, imaju veliku luminoznost, pa se mogu posmatrati i na velikim udaljenostima. Zbog toga cefeide pripadaju standardnim svećama i intenzivno se koriste u određivanju međugalaktičkih udaljenosti i kalibrisanju drugih empirijskih relacija (*ibid.*).

Nema mnogo posmatranih cefeida za koje je poznata masa, što otežava njihovo proučavanje. Zbog toga bi eklipsno dvojni sistemi sa cefeidom, u kojima se može odrediti masa cefeide, mogli biti značajni, kako za asteroseizmologiju, tako i za ispitivanje evolucionih modela zvezda. Bolje poznavanje strukture cefeida moglo bi poboljšati pouzdanost relacije period-sjaj, a time i pouzdanost drugih empirijskih relacija koje se koriste za određivanje međugalaktičkih udaljenosti. Preciznije određivanje udaljenosti na međugalaktičkim i kosmološkim skalama može omogućiti preciznija merenja Hablovog parametra i drugih značajnih parametara kosmoloških modela. Primer eklipsno dvojnog sistema sa cefeidom je cefeida oko koje orbitira egzoplaneta.

U proteklih dvadeset i pet godina, zahvaljujući misijama kao što su HARPS i Kepler, detektovano je preko tri hiljade egzoplaneta. Njihovo otkrivanje je izuzetno značajno u potrazi za vanzemaljskim oblicima života i u ispitivanju teorija evolucije zvezdanih sistema (Schneider 2011). Na osnovu perioda tranzita i krive radijalnih brzina iz posmatranja ovog sistema, može se proceniti masa zvezde oko koje planeta orbitira (*ibid.*).

Ovaj rad ispituje kako radijus planete i velika poluosa orbite planete utiču na mogućnost i sigurnost detektovanja tranzita planete oko cefeide. U tu svrhu napravljeni su model cefeide δ Cephei i model tranzita egzoplanete oko nje koji daju krivu sjaja sistema.

Modelovanje cefeide

U ovom odeljku je modelovana statična struktura zvezde. Rešavanjem jednačina strukture dobijeni su profili gustine, pritiska i temperature zvezde. Zatim su jednačine strukture razvijene po perturbativnom parametru radi dobijanja jednačina koje opisuju promene fizičkih veličina u odnosu na svoje ravnotežne vrednosti kroz zvezdu u toku vremena. Iz prethodnih jednačina dobijena je kriva sjaja cefeide. Model statične zvezde iskorišćen je u rešavanju tih jednačina.

Model statične zvezde

Statična zvezda je modelovana pod pretpostavkom homogenog helijumskog sastava, radijalne simetrije i odsustva rotacije. Osim toga, ključna pretpostavka je konstantan odnos pritiska zračenja i pritiska gasa kroz zvezdu, koja se zasniva na slabom variranju proizvoda neprozračnosti i stope proizvodnje energije kroz zvezdu. Taj odnos je približno konstantan za spoljašnje slojeve zvezde, u koje spada i parcijalno jonizovani sloj helijuma (Hansen *et al.* 2004). Definišemo parametar β koji će određivati odnos pritiska gasa i ukupnog pritiska:

$$\beta := \frac{P_g}{P}.$$

Model zvezdane unutrašnjosti koji koristi ove pretpostavke poznat je kao Edingtonov model. Sofisticiraniji modeli zvezda opravdavaju pretpostavke ovog modela i rezultate koje on daje (*ibid.*).

U ostatku teksta podrazumevaćemo da su veličine definisane po jednici mase, što daje vezu između gustine i zapremine $\rho = 1/V$. Pritisak u zvezdanoj unutrašnjosti potiče od atoma i jona i može se opisati pritiskom idealnog gasa $P_g = \frac{\mathfrak{R}}{\mu} T \rho$, gde je $\mathfrak{R} = \frac{k_B}{m_H}$, pri čemu je k_B Bolcmanova konstanta, a m_H masa atoma vodonika. Međutim, pogotovo kod masivnijih zvezda, kao što su cefeide, treba uračunati i doprinos zračenja u ukupnom pritisku zvezdane unutrašnjosti. Tada jednačina stanja ima oblik:

$$P = \frac{\mathfrak{R}}{\mu} T \rho + \frac{1}{3} a_{\text{rad}} T^4, \quad (1)$$

gde drugi član predstavlja pritisak zračenja $P_r = \frac{1}{3} a_{\text{rad}} T^4$, pri čemu je a_{rad} radijaciona konstanta.

Iz pretpostavke $\beta = \text{const}$ i jednačine (1) dobija se politropska jednačina stanja sa indeksom 3, karakteristična za Edingtonov model, koja daje vezu između pritiska i gustine (*ibid.*):

$$P = K \rho^{\frac{4}{3}}, \quad (2)$$

pri čemu je:

$$K = \left[\frac{3}{a_{\text{rad}}} \cdot \frac{1-\beta}{\mu^4 \beta^4} \mathfrak{R}^4 \right]. \quad (3)$$

Strukturu statične zvezde opisuju četiri diferencijalne jednačine. To su jednačina održanja mase, koja daje raspodelu mase u zvezdi, jednačina hidrostatičke ravnoteže između gravitacione sile i sile pritiska, jednačina održanja energije, koja opisuje gradijent luminoznosti u zvezdi i jednačina koja opisuje prenos toplote kroz zvezdu. Sistem ove četiri jednačine nije zatvoren jer nedostaje odgovarajuća jednačina stanja koja predstavlja vezu između pritiska, gustine i temperature. Korišćenjem jednačine (2) kao jednačine stanja, zbog toga što daje eksplicitnu zavisnost pritiska samo od gustine, moguće je odvojiti prve dve jednačine strukture i rešiti ih nezavisno od jednačina koje opisuju termodinamiku zvezde, što značajno olakšava problem modelovanja zvezde.

Dakle potrebno je rešiti sistem koji sa jednačinom stanja čine zakon održanja mase u diferencijalnom obliku:

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi\rho r^2 \quad (4)$$

i jednačina hidrostatičke ravnoteže:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2}. \quad (5)$$

Rešenje ovih jednačina koje daju profil pritiska i gustine zavise od centralne gustine, koja je osobina konkretne zvezde. Stoga se uvode standardne bezdimenzione smene (*ibid.*) da bi se problem sveo na rešavanje jednačine koja ne zavisi od konkretne zvezde već samo od politropskog indeksa n :

$$\rho = \rho_c \theta^n, \quad r = \alpha \Xi, \quad (6)$$

gde je ρ_c gustina u centru zvezde, θ bezdimenziona gustina, a Ξ bezdimen-

zioni radijus. Parametar $\alpha = \sqrt{\frac{(n+1)K\rho_c^{\frac{1}{n-1}}}{4\pi G}}$ predstavlja faktor skaliranja

između fizičkog i bezdimenzionog radijusa. Korišćenjem tih smena i jednačina (2), (4) i (5) dobija se odgovarajuća Lejn-Emdenova jednačina politropskog indeksa 3:

$$\frac{1}{\Xi^2} \frac{d}{d\Xi} \left(\Xi^2 \frac{d\theta}{d\Xi} \right) = -\theta^3. \quad (7)$$

Početni uslovi za rešavanje ove jednačine se mogu zapisati kao (*ibid.*):

$$\theta(\Xi = 0) = 1, \quad \frac{d\theta}{d\Xi}(\Xi = 0) = \theta'(\Xi = 0) = 0. \quad (8)$$

Prvi granični uslov znači da je gustina u centru zvezde jednaka zadatoj centralnoj gustini a drugi da gustina glatko konvergira ka centralnoj gustini. Numeričkim rešavanjem ove jednačine Runge-Kuta metodom četvrtog reda

(Kiusalaas 2005), gde se integracija vrši dok je bezdimenziona gustina veća od nule, dobijamo profil gustine zvezde. Dalje se na osnovu toga profil pritiska može odrediti iz jednačine (2) i profil temperature iz jednačine (2) i jednačine stanja idealnog gasa.

Za detaljno izvođenje Lejn-Emdenove jednačine, koje opravdava navedene smene, čitalac se upućuje na literaturu (Hansen *et al.* 2004).

Korišćenjem jednačina (3), (4), (6), i (7) može se izraziti centralna gustina preko mase i radijusa zvezde:

$$\rho_c = -\frac{M}{4\pi R^3} \left(\frac{\theta'}{\Xi} \right)' \quad (9)$$

kao i zavisnost β od hemijskog sastava i mase zvezde:

$$\left(\frac{M}{M_0} \right)^2 \mu^4 = \frac{1-\beta}{\beta^4}, \quad (10)$$

gde je $M_0^2 := \frac{48}{\pi} (\Xi^2 \theta')_{r=R} \left(\frac{k_B}{m_H} \right)^4 \frac{1}{aG^3}$. Lejn-Emdenova jednačina uz

vrednosti centralne gustine i politropske konstante daje profil gustine za konkretan objekat (u našem slučaju je to zvezda). Međutim, relacije (9) i (10) daju mogućnost da se za datu masu, radijus i hemijski sastav zvezde dobije profil pritiska, gustine i temperature zvezde.

Model pulsirajuće zvezde

Model pulsirajuće zvezde izložen u ovom radu pretpostavlja da su pulsacije čisto radijalne, što je odlika cefeida. Osim toga, aproksimira se da su pulsacije adijabatski proces, tj. da nema gubitaka energije pri pulsiranju. Adijabatska aproksimacija se odnosi na vezu između perturbacija pritiska i gustine i omogućava odvajanje jednačina koje opisuju mehaniku zvezde od jednačina koje opisuju termodinamiku zvezde. Neadijabatski efekti izražavaju se u prigušivanju ili pojačavanju oscilovanja na dužim vremenskim skalama (Cox 1980). Činjenica da je to vreme veoma dugo u odnosu na vreme posmatranja tranzita tj. vremenski interval u kome se generiše kriva sjaja koju analiziramo, opravdava ovu aproksimaciju.

Posmatrajmo zvezdu koja ima isključivo radijalne pulsacije, gde su sile koje deluju posledica isključivo gradijenta pritiska i gravitacije. Jednačine koje opisuju pulsiranje slojeva zvezde su zakon održanja mase (5) i drugi Njutnov zakon:

$$\ddot{r} = \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{GM}{r^2}. \quad (11)$$

Pretpostavimo da postoji ravnotežno stanje zvezde koje karakteriše hidrostatička ravnoteža ($\ddot{r} = 0$ i $\dot{r} = 0$; tačka iznad veličine označava njen izvod po vremenu). Opis ovog stanja dat je Edingtonovim modelom iz prethodnog odeljka. Zatim, pretpostavimo da sve fizičke veličine osciluju oko vrednosti koje imaju u ravnotežnom stanju i da su amplitude tih

oscilacija male. Definišu se perturbacije radijusa, pritiska i gustine δr , δP i $\delta \rho$ koje zavise od položaja u zvezdi i vremena (*ibid.*):

$$\begin{aligned} r(t) &= r_0 + \delta r(r_0, t), \\ P(r_0, t) &= P(r_0) + \delta P(r_0, t), \\ \rho(r_0, t) &= \rho(r_0) + \delta \rho(r_0, t), \end{aligned}$$

tako da za svaku od veličina važi $|\delta f| \ll f_0$, tj. da je veličina perturbacije mnogo manja od ravnotežne vrednosti. Linearizovanje jednačina (4) i (11) i adijabatska aproksimacija daju redom:

$$\frac{\delta \rho}{\rho_0} = -3\zeta - r_0 \frac{\partial \zeta}{\partial r_0}, \quad (12)$$

$$r_0 \ddot{\zeta} = -\frac{4\zeta}{\rho_0} \frac{dP_0}{dr_0} - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\delta P}{P_0} \right) \frac{dP_0}{dr_0} - \frac{P_0}{r_0} \frac{\partial}{\partial r_0} \left(\frac{\delta P}{P_0} \right), \quad (13)$$

$$\frac{\delta P}{P_0} = \Gamma_1 \frac{\delta \rho}{\rho_0}, \quad (14)$$

$$\zeta(r, t) := \frac{\delta r}{r_0},$$

pri čemu je Γ_1 koeficijent koji se definiše u adijabatskim procesima:

$$\Gamma_1 := \left(\frac{d \ln P}{d \ln \rho} \right)_{\text{ad}}.$$

U aproksimaciji da se parcijalno jonizovovani sloj sastoji od mešavine potpuno jonizovanog gasa (He^{++}) i zračenja (Cox i Giuli 1968):

$$\Gamma_1 = \frac{\frac{C_v}{\mathfrak{R}} \beta^2 + 12\beta(1-\beta) + (4-3\beta)^2}{\frac{C_v}{\mathfrak{R}} \beta + 12(1-\beta)},$$

gde je C_v toplotni kapacitet gasa po jedinici mase pri konstantnoj zapremini. Kako je gas zvezde pretežno jednoatomska, $C_v = 3/2 \mathfrak{R}$.

Kako očekujemo da nam se fizičke veličine menjaju periodično, uvodi se pretpostavka da je moguće razdvojiti relativne perturbacije na prostorni i vremenski deo (Hansen *et al.* 2004):

$$\frac{\delta r}{r_0} = \zeta(r_0) \exp(i\sigma t) \quad (15)$$

gde je σ frekvencija pulsiranja zvezde a $\zeta(r_0)$ amplituda relativne perturbacije radijusa. Linearizovane jednačine koje opisuju adijabatske sinusoidne pulsacije, zajedno sa opisom statične zvezde daju promene fizičkih veličina u vremenu kroz zvezdu. Kombinovanjem jednačina (12)-(15) i uklanjanjem indeksa 0 uz vrednosti koje opisuju statičnu zvezdu dobija se jednačina:

$$-\frac{1}{\rho r^4} \frac{d}{dr} \left(\Gamma_1 P r^4 \frac{d\xi}{dr} \right) - \frac{1}{r\rho} \left\{ \frac{d}{dr} [(3\Gamma_1 - 4)P] \right\} \xi = \sigma^2 \xi,$$

koja je u literaturi poznata kao linearna adijabatska talasna jednačina (eng. linear adiabatic wave equation, u daljem tekstu LAWE; *ibid.*). Ona, zajedno sa odgovarajućim graničnim uslovima predstavlja regularni Šturm-Liuvilov problem svojstvenih vrednosti. Svojtvenu vrednost predstavlja kvadrat frekvencije pulsacija σ^2 , a svojstvene funkcije su rešenja LAWE $\xi(r)$ za datu svojstvenu vrednost.

Kako bi radijalna simetrija bila očuvana u centru zvezde mora da važi:

$$\left(\frac{d\xi}{dr} \right)_{r=0} = 0.$$

Takođe da bi pritisak težio nuli ka površini zvezde važi (*ibid.*):

$$\left(4\xi + \frac{\mathfrak{R}^3}{GM} \sigma^2 + \frac{\delta P}{P} \right)_{r=R} = 0.$$

LAWE je homogena diferencijalna jednačina drugog reda, ali kako je i frekvencija nepoznata to za njeno rešenje su potrebna tri granična uslova. Stoga treba izvršiti normalizaciju njenih rešenja, kako bi ona mogla numerički da se odrede. Za cefeide i slične pulsirajuće zvezde poznato je da važi (Rodgers 1956):

$$\xi_{r=R} \approx 0.1.$$

Specijalno, u slučaju politropskog opisa statične zvezde, dobija se politropska LAWE:

$$\frac{d^2 \xi}{d\xi} + \left[\frac{4}{\Xi} + 4 \frac{\theta'}{\theta} \right] \frac{d\xi}{d\xi} + \left[3\Gamma_1 - 4 - \omega^2 \frac{\frac{\Xi}{\theta'}}{\left(\frac{\Xi}{\theta'} \right)_{r=R}} \right] \frac{4}{\Gamma_1 \Xi} \frac{\theta'}{\theta} \xi = 0,$$

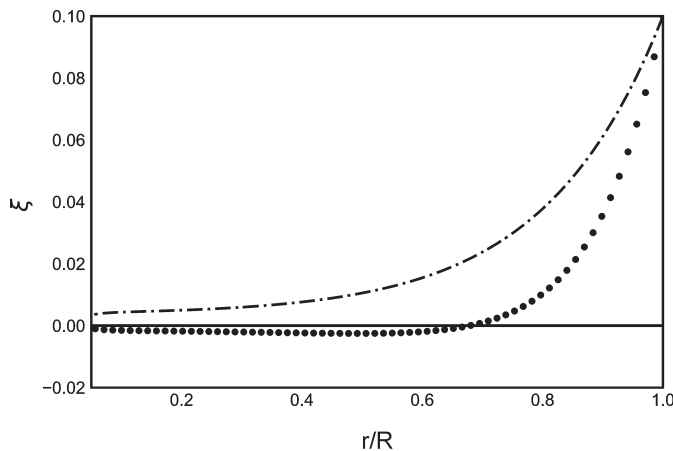
gde je bezdimenziona frekvencija definisana preko $\omega^2 := \frac{R^3}{GM} \sigma^2$ i predstavlja svojstvenu vrednost jednačine.

Činjenica da je po sredi regularni Šturm-Liuvilov problem svojstvenih vrednosti obezbeđuje da ih možemo poređati u rastući niz i da postoji najmanja među njima. Ta osobina svojstvenih vrednosti je bitna jer omogućava numeričko određivanje prvih nekoliko svojstvenih vrednosti.

Ova osobina svojstvenih vrednosti ima odgovarajuću fizičku interpretaciju. Cefeide najčešće pulsiraju u osnovnom harmoniku (čija je frekvencija najmanja), ponekad u prva dva a veoma retko u prva tri harmonika (Hansen *et al.* 2004). Stoga se ovaj rad bavio određivanjem prve dve frekvencije.

One se mogu odrediti shooting metodom, koji funkcioniše tako što se svojstveni problem svodi na problem početnih vrednosti. Iz zadatog intervala se biraju ekvidistantne vrednosti frekvencija koje se koriste kao

svojsvene vrednosti. Za svaku od tih vrednosti vrši se numerička integracija jednačine (u našem slučaju politropske LAWE). Zatim se proverava koliko takvo rešenje zadovoljava granični uslov postavljen sa strane ka kojoj se vrši integracija. U ovom radu integracija je vršena ka unutrašnjosti pri čemu je uslov $\left(\frac{d\xi}{dr}\right)_{r=0} = 0$. Svojsvene vrednosti za koje odstupanje od tog graničnog uslova dostiže lokalne minimume su tražene svojsvene vrednosti. Znajući njih, odgovarajuće funkcije se mogu odrediti integracijom jednačine (u našem slučaju politropske LAWE; Kiusalaas 2005; slika 1).



Slika 1. Rešenja politropske LAWE jednačine za parametre $M = 4.5 M_{\odot}$, $R = 44.5 R_{\odot}$ i $\mu = 0.62$. Tačka-crtom je predstavljeno rešenje za osnovni harmonik kome odgovara svojsvena vrednost $\omega^2 = 9.2$, dok je tačkastom linijom prikazano rešenje za prvi harmonik kome odgovara $\omega^2 = 16.9$.

Figure 1. Solution of the LAWE for parameters $M = 4.5 M_{\odot}$, $R = 44.5 R_{\odot}$ and $\mu = 0.62$. Solution for fundamental harmonic with eigenvalue $\omega^2 = 9.2$ is displayed with dash-dotted line and solution for first harmonic with eigenvalue $\omega^2 = 16.9$ is displayed with dotted line.

Kompozitna kriva sjaja

Kriva sjaja pulsirajuće zvezde

Pri modelovanju pulsacija cefeide one su, radi jednostavnijeg modela, aproksimirane kao adijabatske, kako bi se dobio mehanički opis cefeide. Tako je zapostavljen uticaj prenosa energije na mehaničke osobine. Kako prenos energije kroz parcijalno jonizovani sloj koji pulsira stvara promenu luminoznosti cefeide, ovaj sloj zahteva i termodinamički opis. U ovom poglavlju dat je neadijabatski opis parcijalno jonizovanog sloja čije su pulsacije adijabatske, stoga je naš opis parcijalno jonizovanog sloja kvazi-adijabatski.

Jednačine u nastavku teksta koriste promene luminoznosti po masi umesto po radijusu iz praktičnih razloga. Prelaz sa jedne na drugu nezavisnu promenljivu se može izvršiti pomoću zakona održanja mase. U slučaju nestatične zvezde, zakon održanja energije ima oblik (Cox 1980):

$$\frac{dQ}{dT} = -\frac{dL(m)}{dm} + \epsilon, \quad (16)$$

gde je $L(m)$ luminoznost zvezde u sloju unutar kog je masa m , tj. ukupna energija koja u jedinici vremena napušta taj sloj, Q količina toplote u delu zvezde, a ε količina energije koju u jedinici vremena proizvede jedinica mase zvezdane materije.

Kako u parcijalno jonizovanim slojevima koji su jako blizu površine zvezde nema proizvodnje energije nuklearnom fuzijom, $\varepsilon = 0$.

U cilju pojednostavljenja termodinamičkog opisa, parcijalno jonizovan sloj helijuma aproksimiran je potpuno jonizovanim slojem helijuma (He^{++}).

Promena toplote u vremenu za potpuno jonizovani sloj se može izraziti korišćenjem politropske jednačine stanja i prvog zakona termodinamike:

$$\frac{dQ}{dT} = \left(\frac{4}{3}A + B \right) K\rho^{-\frac{2}{3}} \frac{d\rho}{dt}, \quad (17)$$

$$\text{gde su konstante } A = \frac{C_v \beta + 12(1-\beta)}{4-3\beta} \text{ i } B = -\frac{C_v \beta^2 + 12\beta(1-\beta) + (4-3\beta)^2}{4-3\beta}.$$

Promena luminoznosti kroz slojeve se može izraziti preko relativne promene luminoznosti l' :

$$\frac{\partial L}{\partial m} = \frac{\partial L_0}{\partial m} (1 + l') + L_0 \frac{\partial l'}{\partial m}, \quad (18)$$

gde je l' definisano u $L = L_0(m) \cdot (1 + l'(m, t))$.

U statičnom slučaju, za slojeve gde nema proizvodnje energije, pa stoga i za parcijalno jonizovani sloj važi $\frac{\partial L_0}{\partial m} = \varepsilon = 0$.

Bekerov adijabatski model pulsacija (Baker 1966) daje termodinamički opis samo pulsacija sloja koji je odgovoran za promenu sjaja. Ovaj model pulsacija se sastoji iz tri pretpostavke. Prva je da se relativna promena luminoznosti tog sloja može izraziti kao srednja vrednost u gornjem delu l'_u i donjem delu sloja l'_d , $l' = \frac{l'_u + l'_d}{2}$. Druga je da se njena promena

može aproksimirati konačnim razlikama kao $\frac{\partial l'}{\partial m} = \frac{l'_u - l'_d}{m_0}$, gde je m_0 masa

parcijalno jonizovanog sloja. Kako su pulsacije ostatka zvezde modelovane adijabatski, promene luminoznosti ispod parcijalno jonizovanog slojeva nema, pa se može pretpostaviti $l'_d = 0$, što daje (*ibid.*):

$$\frac{\partial l'}{\partial m} = \frac{2l'_u}{m_0}. \quad (19)$$

Kombinovanjem jednačina (12), (14)-(19) dobija se izraz koji daje relativno odstupanje luminoznosti u vremenu:

$$l' = \left(\frac{m_0 K}{2L_0} \rho_0^{\frac{1}{3}} \right) i \sigma e^{i\sigma t} \left(3\xi + \Xi \frac{d\xi}{d\Xi} \right),$$

pri čemu se u $3\xi + \Xi \frac{d\xi}{d\Xi}$ podrazumevaju vrednosti koje odgovaraju parcijalno jonizovanom sloju.

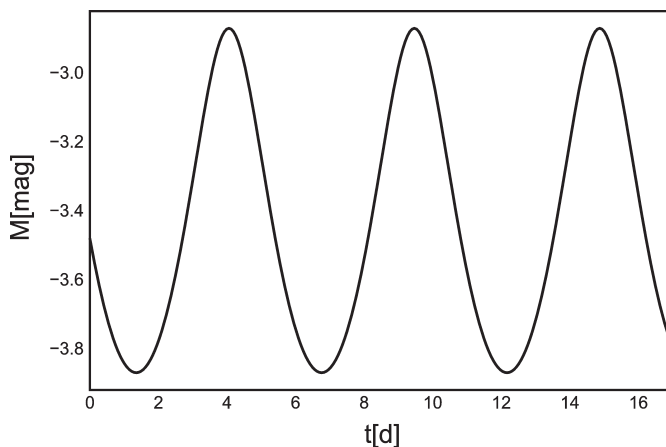
Masa oscilujućeg sloja je određena radiusima na kojima je odnos koncentracija He^+ i He^{++} 5% i 95%. Temperature na kojima važe ti odnosi koncentracija se mogu odrediti iz Sahine jednačine koja daje odnos broja atoma u susednim stanjima jonizacije (Cox i Giuli 1968):

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2(2\pi m_e k_B T)^{\frac{3}{2}}}{n_e h^3} \frac{U_{i+1}}{U_i} \exp\left(-\frac{\chi_i}{k_B T}\right)$$

gde je n_e koncentracija elektrona, m_e masa elektrona, U_i statistička težina jona ili atoma (i je broj elektrona koji fali atomu da bi bio neutralan), χ_i energija jonizacije i -tog stanja i h Plankova konstanta. Koncentracija elektrona se može odrediti kao $n_e = \frac{1}{2} \frac{\rho}{m_p} (1 + X)$, uz aproksimaciju da je

sredina potpuno jonizovana (*ibid.*), gde je X relativna koncentracija vodonika (za cefeide $X \approx 0.7$ iz rada Mundprecht *et al.* 2015). Poznavanjem profila temperature zvezde koji daje Edingtonov model mogu se odrediti radiusi na kojima su te dve temperature, odakle se može naći masa parcijalno jonizovanog sloja iz zakona održanja mase.

Na slici 2 je predstavljen primer krive sjaja cefeide koju daje opisani model.



Slika 2. Dobijena kriva sjaja cefeide za parametre $M = 4.5 M_{\odot}$, $R = 44.5 R_{\odot}$ i $\mu = 0.62$ za osnovni harmonik.

Figure 2. Light curve of Cepheid for parameters $M = 4.5 M_{\odot}$, $R = 44.5 R_{\odot}$ and $\mu = 0.62$ for the fundamental harmonic.

Kriva sjaja tranzita

U nastavku teksta biće opisano dobijanje kompozitne krive sjaja cefeide sa egzoplanetom na osnovu krive sjaja cefeide koju daje model razvijen u prethodnom delu rada. Za dobijanje krive sjaje tranzita korišćen je model tranzita u kome su zvezda i planeta predstavljani kao dva kružna diska koji se međusobno pomračuju (Gimenez 2006). Za opisivanje položaja planete

tokom trajanja tranzita koristi se faza θ , ugao između pravca vizure i prave koju određuju zvezda i planeta u tom trenutku, koji raste u pozitivnom smeru od 0 do 2π . Prividna udaljenost centara diska zvezde i planete iz perspektive posmatrača δ može se izračunati na sledeći način (*ibid.*):

$$\delta = \frac{(1-e^2)a}{1-e\sin(\theta-\omega)} \sqrt{1-\cos^2\theta \sin^2 i},$$

gde je e ekscentricitet orbite planete, ω argument perihela, i inklinacija orbite, a a velika poluosa. Ukupna luminoznost sistema se može izraziti preko luminoznosti zvezde $L_S(t) = L_{S0}(1+l(t))$, pri čemu je L_{S0} srednja luminoznost zvezde i luminoznosti planete L_P :

Kako je $L_S(t) + L_P \approx L_S(t)$, predhodna jednačina se svodi na (*ibid.*):

$$l(t) = (1-\alpha(t))L_S(t),$$

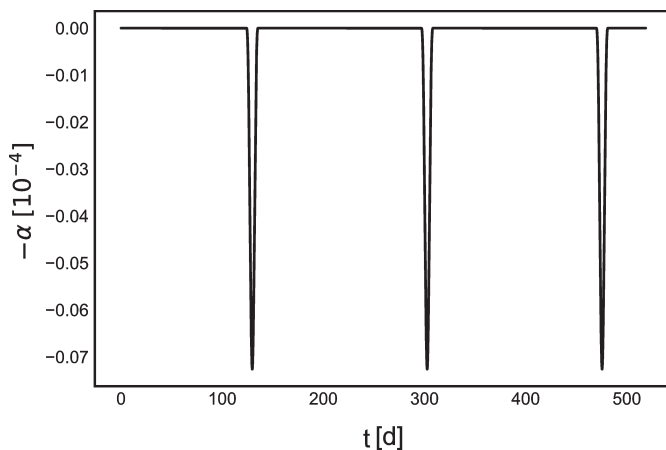
gde je $\alpha(t)$ relativni gubitak svetlosti usled tranzita. Za određivanje ove funkcije potrebno je uzeti zakon potamnjenja ka rubu. On opisuje opadanje sjaja zveze od centra njenog diska ka rubu. U opštem obliku on glasi (*ibid.*):

$$I(\mu) = I(1) \left[1 - \sum_{n=1}^N u_n (1-\mu^n) \right],$$

gde je $I(1)$ intenzitet svetlosti koji normalno izlazi sa površine zvezde, $\mu = \cos\theta$, a u_n koeficijenti potamnjenja ka rubu. Uzimajući u obzir zakon distribucije svetlosti po površini, možemo razdvojiti parametre zračenja od geometrije tranzita u funkciji α (*ibid.*):

$$\alpha = \sum_{n=0}^N C_n \alpha_n,$$

gde je C_n koeficijent koji opisuje potamnjenje ka rubu a α_n koeficijent relativnog gubitka svetlosti koji zavisi od odnosa radijusa planete i zvezde i njihove prividne udaljenosti. Određivanje koeficijenata C_n i α_n na osnovu radijusa planete, radijusa zvezde i njihove prividne udaljenosti δ opisano je u ranijim istraživanjima (Radović 2015, Gimenez 2006). Napominjemo da



Slika 3. Kriva sjaja tranzita za parametre: $M = 4.5 M_{\odot}$, $R = 44.5 R_{\odot}$, $R_p = 1.5 R_J$, $a = 1 \text{ AU}$, $e = 0$, $i = \omega = \pi/2$.

Figure 3. Light curve of transit for parameters: $M = 4.5 M_{\odot}$, $R = 44.5 R_{\odot}$, $R_p = 1.5 R_J$, $a = 1 \text{ AU}$, $e = 0$, $i = \omega = \pi/2$.

je funkcija u istraživanju Radovića (2015), koju autor predstavlja kao Jakobijev polinom, zapravo normalizovani Jakobijev polinom:

$$G_n(p, q'; x) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+p)}{\Gamma(2n+q)} P_n^{(p-q, q-1)}(2x-1),$$

gde P_n predstavlja Jakobijev polinom, a $\Gamma(n) = (n-1)!$ je gama funkcija.

Na slici 3 je prikazana kriva sjaja tranzita egzoplanete oko zvezde, čiji se parametri (masa, radijus) zadaju, koju daje ovaj model.

Dodavanje šuma

Kako bi kriva sjaja cefeide sa egzoplanetom bila realističnija, na nju je dodat šum (greška merenja). Zbog svojih visokih performansi u konkurenciji teleskopa koji se bave posmatranjem egzoplaneta, preuzeta je vrednost preciznosti teleskopa Kepler (pošto je on trenutno najprecizniji teleskop čija je namena posmatranje egzoplaneta; Van Cleve i Caldwell 2009). Kako ćemo analizu mogućnosti detektovanja tranzita oko cefeide izvršiti na primeru cefeide δ Cephei, preuzeta je vrednost preciznosti koja odgovara njenom sjaju i iznosi $P = 3.9 \cdot 10^{-5}$ (*ibid.*). Preciznost je definisana preko odnosa šuma i signala.

Veza između magnitude i jačine signala S je korišćenjem Pogsonovog zakona u obliku (Hainaut 2005):

$$m(S) = -2.5 \log S + \text{const.}$$

Greška posmatranja neke referentne zvezde σ_s se može odrediti kao razlika magnitude signala sa šumom i magnitude signala (*ibid.*):

$$\sigma_s = |-2.5 \log(S + N) + 2.5 \log S| = 2.5 \log \left(1 + \frac{1}{\text{SNR}} \right),$$

gde je N šum a SNR je odnos signala prema šumu $\text{SNR} := \frac{S}{N}$ (*ibid.*).

Iz veze između preciznosti i SNR-a $P = 1/\text{SNR}$ (*ibid.*) može se proceniti greška signala u magnitudama: $\sigma_s \approx 20 \mu\text{mag}$.

Međutim kako greška magnitude signala neke zvezde zavisi od magnitude signala, potrebno je proceniti grešku za svaku tačku krive sjaja. Kako je greška u fotometriji srazmerna korenu broja prikupljenih fotona, korišćenjem Pogsonovog zakona dobija se izraz za grešku $\sigma(m)$ (Milić i Kološnjaji 2015):

$$\sigma(m) = \sigma_s \sqrt{10^{0.4(m-m_s)}},$$

gde je $m_s \approx 2.089$ magnituda referentne zvezde, koja je preuzeta iz kataloga Kepler.

Analiza kompozitne krive sjaja

Kompozitna kriva sjaja cefeide i tranzita predstavlja signal koji govori o promeni ukupne magnitude u vremenu, $M(t)$. U cilju analiziranja jačine signala tranzita, signal je korišćenjem diskretne Furijeove transformacije

(DFT) predstavljen kao raspodela amplitude signala po frekvencijama tj. amplitudski spektar $M(f)$ (Cerna i Harvey 2000). Pošto pulsacije cefeida generalno kraće traju od perioda tranzita planeta (period planete je najčešće reda veličine meseca ili godine – Schneider 2011; period pulsacije cefeida nekoliko dana – Vukićević-Karabin i Atanacković-Vukmanović 2004), najmanja frekvencija u amplitudskom spektru biće frekvencija cefeide. Stoga, kako bi se zadovoljila Nyquist–Shannon teorema o uzorkovanju signala (*ibid.*), koja garantuje rekonstrukciju kontinualnog signala iz njegove diskretne verzije, vremenski korak s kojim se generiše kriva sjaja mora da zadovoljava nejednakost $1/\Delta t = f_s > f_{\min}$, gde je f_{\min} najmanja frekvencija signala, u našem slučaju frekvencija pulsiranja cefeide.

Radi kvantifikovanja mogućnosti da se signal tranzita detektuje, definisan je faktor Q . On se određuje kao odnos amplitude signala na frekvenciji na kojoj se očekuje tranzit i standardne devijacije okolnog šuma. Tako definisano Q daje informaciju o tome sa kolikom sigurnošću (izraženom u standardnim devijacijama) se može tvrditi da je detektovan tranzit egzoplanete na osnovu diskretnog vremenskog signala $M(t)$.

Rezultati i diskusija

Model tranzita naveden u ovom radu za parametre uzima odnos radijusa egzoplanete i zvezde, veliku poluosu, inklinaciju, ekscentricitet i argument perihela orbite egzoplanete. Parametri modela cefeide su masa, radijus, luminoznost i hemijski sastav zvezde. U nastavku ovog poglavlja, pod signalom tranzita podrazumeva se promena sjaja usled tranzita u vremenskom domenu.

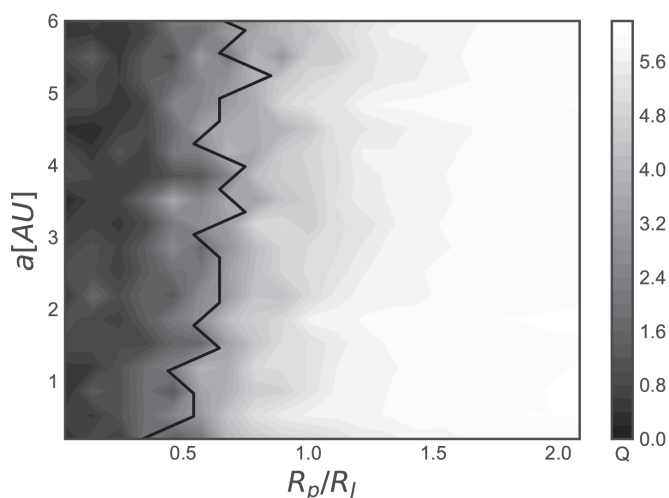
U ovom odeljku diskutovan je uticaj parametara modela tranzita i modela cefeide na analizu kompozitne krive sjaja i predstavljeni rezultati analize za zvezdu δ Cephei ($M = 4.5 M_{\odot}$, $R = 44.5 R_{\odot}$ i $\mu = 0.62$ iz rada Matthews *et al.* 2012) koja je prototip ove vrste pulsirajućih zvezda.

U cilju smanjenja prostora parametara koji ispitujemo uvešćemo neke aproksimacije. S obzirom na to da argument perihela menja fazu signala tranzita, on ne utiče na amplitudu tranzita, te ni na analizu detektabilnosti signala. Stoga je on fiksiran na vrednost $\pi/2$. Ekscentricitet menja širinu signala tranzita jer menja trajanje prelaska planete preko površine diska zvezde, ali ne utiče na amplitudu tranzita. Vrednost inklinacije utiče na vreme prelaska planete preko zvezde (što je inklinacija veća, vreme je duže), samim tim i na širinu signala tranzita. Osim toga, s obzirom na to da model tranzita uzima u obzir efekat potamnjenja ka rubu, inklinacija utiče i na amplitudu tranzita. Velika poluosu planete ne utiče na amplitudu signala jer je udaljenost egzoplanete od cefeide zanemarljiva u odnosu na udaljenost tog sistema od Zemlje. Ona utiče na širinu signala tranzita (zbog toga što zajedno sa masom zvezde određuje vreme potrebno da egzoplaneta pređe preko zvezde). Osim toga, velika poluosu je jedini orbitalni parametar koji utiče na frekvenciju signala (zajedno sa masom zvezde iz trećeg Keplеровog zakona daje period tranzita). Poluprečnik egzoplanete ima ubedljivo dominantan uticaj na amplitudu signala tranzita (Gimenez 2006).

Uzimajući u obzir način na koji se određuje faktor Q , on nije osetljiv na širinu signala, pa je ekscentricitet fiksiran na vrednost $e = 0$. U prvoj aproksimaciji pretpostavljeno je da je uticaj efekta potamnjenja ka rubu zanemarljiv, što nam omogućava da fiksiramo vrednost inklinacije na $i = \pi/2$. Ovakvo fiksirani ekscentricitet i inklinacija daju najveću moguću amplitudu signala.

Priroda LAWE jednačine daje rešenja mnoštvo harmonika u kojima cefeida može da pulsira. Jednostavnosti radi, pri generisanju krive sjaja cefeide uzet je u obzir samo fundamentalni mod oscilovanja (uzima se najmanja frekvencija koja zadovoljava politropsku LAWE). Time je prostor parametara sistema sveden na veliku poluosu i poluprečnik planete. Na slici 4 prikazana je zavisnost faktora Q od velike poluose i poluprečnika planete na rasponu veličina koje odgovaraju egzoplanetama detektovanim metodom tranzita, ukoliko bi one orbitirale oko δ Cephei. Analiza krivih sjaja u trajanju od 30, 50 i 70 perioda tranzita egzoplanete ukazuje da vreme posmatranja u tom intervalu ne utiče na detektabilnost.

Na slici 4 se može uočiti da faktor Q raste sa povećanjem poluprečnika planete, što je i očekivano jer jačina signala tranzita raste sa poluprečnikom planete.



Slika 4. Konturni plot koji daje zavisnost faktora Q (gradijentna skala) od velike poluose i radijusa planete (u radijusima Jupitera). Krive sjaja su analizirane u vremenskom intervalu od 70 perioda tranzita. Izlomljenom linijom predstavljen je signal na $Q = 3$.

Figure 4. Contour plot which shows the dependency of the Q factor (gradient grayscale) on the semi-major axis and the radius of the planet (in Jupiter's radius). Light curves are analyzed in intervals of 70 periods of transit. The broken line signifies signal level of $Q = 3$.

Sa prethodne slike može se zaključiti da planete radijusa većeg od ~ 0.7 radijusa Jupitera zadovoljavaju granicu detektabilnosti od 3 standardne devijacije. Takođe, sa ovom ili većom sigurnošću, metodom tranzita može se detektovati $\sim 40\%$ (20%) do sada (tranzitom) detektovanih egzoplaneta, ako bi one orbitirale oko δ Cephei (Schneider 2011). Iako bi se možda očekivalo da se više planeta može detektovati sa sigurnošću od 3 standardne devijacije, treba imati na umu da raspodela egzoplaneta po veličini nije uniformna.

Fluktuacije u vrednosti faktora Q na slici 4 potiču od toga što je dodavanje šuma na signal „slučajan” proces.

Zaključak

Modelovana je statična zvezda pod pretpostavkom homogenog helijskog sastava, odsustva rotacije i radijalne simetrije Edingtonovim modelom (Hansen *et al.* 2004). Prednost ovog modela je mogućnost zasebnog rešavanja jednačina koje opisuju mehaniku zvezde kako bi se dobili profili gustine i pritiska. Tu prednost omogućava aproksimacija da je odnos pritiska gasa i ukupnog pritiska konstantan kroz zvezdu. Napravljen je model cefeide korišćenjem modela statične zvezde. Pretpostavljeno je da su relativne promene fizičkih veličina od njihovih ravnotežnih vrednosti male i da je njihova vremenska zavisnost sinusoidna. Za Edingtonov model statične zvezde, ove perturbacije opisuje politropska LAWE jednačine (*ibid.*). Njeno rešavanje daje frekvencije pulsiranja cefeide i zavisnost fizičkih veličina u vremenu kroz zvezdu.

Dobijanje krive sjaja cefeide zahtevalo je da se parcijalno jonizovani sloj helijuma opiše kvazi-adijabatski. To je postignuto pomoću Bekerove pretpostavke o promeni luminoznosti, koja aproksimira relativnu promenu luminoznosti u parcijalno jonizovanom sloju srednjom vrednošću perturbacija luminoznosti u slojevima iznad i ispod tog (Baker 1966). Na osnovu ovog modela dobijena je kriva sjaja δ Cephei čija amplituda i period odgovaraju vrednostima dobijenim iz posmatranja. Iskorišćen je model tranzita egzoplanete (Gimenez 2006) kako bi se, uz model cefeide, dobila kriva sjaja sistema u kome egzoplaneta pomračuje cefeidu. Radi realističnije krive sjaja, na nju je dodat šum teleskopa Kepler, najpreciznijeg teleskopa koji se bavi posmatranjem egzoplaneta. Kriva sjaja egzoplanete koja kruži oko δ Cephei na koju je dodat šum je analizirana za različite vrednosti radijusa i velike poluose planete. Na osnovu analize krive sjaja procenjena je mogućnost detektovanja egzoplanete oko cefeide metodom tranzita. Kao što je i očekivano, na mogućnost detektovanja egzoplanete dominantno utiče radijus egzoplanete. Pokazano je da bi se egzoplanete radijusa većeg od ~ 0.7 radijusa Jupitera mogle detektovati tranzitom sa sigurnošću većom od 3 sigma, ukoiko bi orbitirale oko δ Cephei.

Pulsacije su, u ovom radu, opisane perturbacijama prvog reda što je dalo čisto sinusoidnu promenu luminoznosti. Kako promene luminoznosti cefeida nisu sinusoidne, trebalo bi, radi realističnije krive sjaja, razmotriti neki složeniji model pulsacija. Osim toga analiza krive sjaja izneta je samo za jednu konkretnu cefeidu, δ Cephei. Trebalo bi analizu izvršiti na više različitih cefeida kako bi se videlo koliko utiče frekvencija i oblik krive sjaja cefeide na detekciju egzoplanete. Takođe, ova analiza bi mogla da se proširi razmatranjem uticaja inklinacije na detektabilnost.

Zahvalnost. Želimo da izrazimo zahvalnost Sanji Mihajlović i Borisu Majiću na pomoći pri analiziranju međurezultata Furijeove analize krive sjaja kao i Stanislavu Miloševiću i Mateji Boškoviću na konstruktivnoj kritici ranije verzije teksta rada.

Literatura

- Baker N. 1966. *Simplified Models for Cepheid Instability*. New York: Plenum Press
- Cerna M., Harvey A. F., 2000. The fundamentals of FFT-based signal analysis and measurement. *National Instruments, Junho*, str. 54.
- Cox J. P., Giuli R. T. 1968. *Principles of stellar structure*. New York: Gordon and Breach
- Cox J. P. 1980. *Theory of stellar pulsation*. New Jersey: Princeton University Press
- Gimenez A. 2006. Equation for the analysis of the light curves of extra-solar planetary transits. *Astronomy & Astrophysics*, **450**: 1231.
- Hainaut O. 2005. *Signal, Noise and Detection*. European Southern Observatory
- Hansen J. C., Kawaler D. S., Trimble V. 2004. *Stellar Interiors: Physical Principles, Structure, and Evolution*. New York: Springer
- Kiusalaas J. 2005. *Numerical Methods in Engineering with Python*. Cambridge: Cambridge University Press
- Matthews L. D., Marengo M., Evans N. R., Bono G. 2012. New Evidence for Mass Loss from δ Cephei from H I 21 cm Line Observations. *The Astrophysical Journal*, **744**: 53.
- Milić D., Kološnjaji M. 2015. Određivanje parametara globularnih jata pomoću mreža. *Petničke sveske*, 74: 16.
- Mundprecht E., Muthsam H. J., Kupka F. 2015. Multidimensional realistic modeling of Cepheid-like variables II: Analysis of a Cepheid model. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **449**: 2539.
- Radović M. 2015. Uticaj gravitacionog mikrosočiva na Rossiter – McLaughlin efekat. *Petničke sveske*, 74: 23.
- Rodgers A. W. 1956. Radius variation and population type of Cepheid variables. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **117**: 85.
- Schneider J. 2011. Interactive Extra-Solar Planets Catalog. The Extrasolar Planet Encyclopaedia. Dostupno na <http://exoplanet.eu/catalog.php>
- Van Cleve J., Caldwell D. 2009. *Kepler: A Search for Terrestrial Planets*. Moffet Field, NASA/Ames Research Center
- Vukićević–Karabin M., Atanacković-Vukmanović O. 2004. *Opšta astrofizika*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva

Modeling and analysis of the Cepheid Variable Light Curve with a Transiting Exoplanet

In this paper we presented the theoretical model of the Cepheid variable light curve with a transiting exoplanet. Our aim was to investigate the possibility of detecting exoplanets around Cepheid variables using transit photometry, depending on the planet's radius and semi-major axis. Cepheids are extremely important because their periodic changes in brightness can be used to figure out their distance. As our knowledge about them grows, our measurements of the universe become more and more precise.

The model of a stationary and static star was obtained by solving the Lane-Emden equation for polytropic index $n = 3$ (derived from Eddington's model), under assumptions of spherical symmetry and homogeneous chemical composition.

We approximated pulsations as adiabatic because it allowed us to separate the thermodynamic analysis of the cepheid from the mechanic analysis.

The linear adiabatic wave equation was obtained by linearizing the equations of stellar structure, under the assumption of radial adiabatic pulsations. By applying the solution of a static star, we have described the partially ionized layer of helium, which is responsible for the pulsations. We approximated that this helium layer is completely ionized. The star's light curve was calculated using the star parameters (mass, luminosity, radius) at the depth of the helium layer.

The transit light curve was obtained by using the model from Gimenez's paper (2006), which considers limb darkening. The model returns the light curve depending on the planet's orbital parameters and radius, and Cepheid parameters.

The composite light curve was obtained by combining both light curves. To create a more realistic setting, we incorporated noise into our model. The strength of the signal in the power spectrum is described by the Q factor. It is defined as the ratio of signal amplitude and standard deviation of the surrounding signal points. Our results show that Q is increasing with the planet's radius, which was expected. Using this method we could detect, with 3 sigma significance, up to 40% (20%) of all the confirmed exoplanets (using the transit method), if orbiting around δ Cephei.

