

Rotirajući halo superfluidne tamne materije

Teorija superfluidne tamne materije, razvijena u radu Berezijanija i Kourija, na galaktičkim skalama reprodukuje fenomenološki zakon modifikovane njutnovske dinamike, dok se na velikim skalama ponaša kao teorija hladne tamne materije. U ovoj teoriji galaktički halo tamne materije je kondenzat, a fononi generišu efekte modifikovane njutnovske dinamike. Jedna od posledica superfluidne prirode tamne materije je pojava vorteksa u haloima. Vorteksi se formiraju kada halo rotira ugaonom brzinom većom od kritične ugaone brzine, potrebne za njihovo formiranje. Berezijani i Kouri su procenili kritičnu ugaonu brzinu pozivajući se na relaciju adekvatnu za laboratorijske sisteme. U ovom radu su modelovani halo tamne materije i vorteks, pozicioniran duž ose rotacije haloa, rešavanjem modifikovane Gros-Pitaevski jednačine za kondenzat čestica tamne materije. Ovaj pristup omogućava konzistentan opis nerotirajućeg i rotirajućeg haloa, sa i bez vorteksa. Određen je profil gustine haloa u nerotirajućem i rotirajućem slučaju, korišćenjem Kipenhan-Tomasove aproksimacije i zaključeno je da rotacija ne utiče značajno na strukturu haloa. Takođe je određen profil gustine vorteksa i kritična ugaona brzina za pojavu vorteksa u halou, koja opravdava procenu u radu Berezijanija i Kourija.

Uvod

Istorijski, prvi indikator postojanja tamne materije je problem rotacionih kriva galaksija. Kretanje zvezda oko centra galaksije je diktirano gravitacionim poljem galaksije. Iz njutnovske

gravitacije dobija se brzina rotacije oko centra galaksije:

$$v(r) = \sqrt{\frac{M(r)G}{r}} \quad (1)$$

gde je r udaljenost od centra galaksije, a $M(r)$ masa unutar sfere radijusa r . Pod pretpostavkom da je masa koncentrisana u disku galaksije, obuhvaćena masa na udaljenostima izvan diska treba da bude konstantna. Odatle je, izvan diska, $v \sim r^{-1/2}$. Međutim posmatranja pokazuju da je izvan diska brzina rotacije približno konstantna, što implicira $M(r) \sim r$. Ovaj zaključak sugerise postojanje dodatne komponente materije, tamne materije, izvan diska vidljive materije.

Standardni model tamne materije je model hladne tamne materije (eng. Cold Dark Matter, u daljem tekstu CDM; Lisanti 2016). Ovaj model pretpostavlja tamnu materiju koja se sastoji od hladnih, masivnih čestica koje ne interaguju elektromagnetno. Kako odsustvo elektromagnetne interakcije povlači nemogućnost direktnog posmatranja ove materije, nazivamo je tamnom. Ovaj model (*ibid.*) se slaže sa posmatranjima na međugalaktičkim i kosmološkim skalama (jedno od najvažnijih su posmatranja kosmičkog pozadinskog zračenja), međutim, CDM ima određene probleme na galaktičkim skalama (poreklo Barionske Tali-Fišer relacije) (Berezhiani i Khoury 2015).

U CDM modelu se tamna materija u galaksijama organizuje u halo tamne materije. Halo tamne materije je sferoidna struktura koja obavlja galaktički disk. Njegova masa je znatno veća od mase barionske materije unutar galaksije.

Nikola Savić (1999), Beograd, Ugrinovački put 10. deo 33, učenik 2. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

Predrag Despotović (1999), Novi Sad, Milice Stojadinović Srpkinja 4, učenik 2. razreda Gimnazije „Jovan Jovanović Zmaj” u Novom Sadu

MENTORI:

Mateja Bošković, ISP

Aleksandra Arsovski, studentkinja osnovnih studija Fakulteta za Fiziku Tehničkog Univerziteta u Beču, Austrija

Kako je halo tamne materije sačinjen od tamne materije, on se ne može posmatrati direktno ali se mogu opaziti njegovi gravitacioni uticaji.

Alternativni model za objašnjavanje galaktičkih kriva rotacije je modifikovana njutnovska dinamika (eng. Modified Newtonian Dynamics, u daljem tekstu MOND). Ovaj pristup pretpostavlja uopštenje drugog Njutnovog zakona (Zhao i Famaea 2006):

$$F = M\mu(a)a \quad (2)$$

gde koeficijent $\mu(a)$ predstavlja korekciju drugog Njutnovog zakona i računa se po formuli:

$$\mu(a) = \frac{a}{a_0 \sqrt{1 + \left(\frac{a}{a_0}\right)^2}} \quad (3)$$

pri čemu je a_0 konstanta.

U režimu malih ubrzanja, $a \ll a_0$, sila je srazmerna kvadratu ubrzanja. Nasuprot tome, pri većim ubrzanjima, sila je srazmerna ubrzanju, kao što je i u standardnoj njutnovskoj mehanici. MOND objašnjava određene fenomene na galaktičkim skalama koje CDM ne uspeva da reprodukuje. Na većim skalama MOND značajno odstupa od rezultata dobijenih posmatranjima (Berezhiani i Khoury 2015).

Veći deo astronomske zajednice skloniji je postuliranju dodatne komponente materije (Lisanti 2016), nego modifikaciji gravitacije koju implicira MOND i koja ima više problema za koje se ne vidi jasno rešenje. Međutim, MOND se može posmatrati kao fenomenološki zakon koji uspešna teorija tamne materije treba da objasni na galaktičkim skalama (Berezhiani i Khoury 2015).

Teorija superfluidne tamne materije (eng. Superfluid Dark Matter, u daljem tekstu SFDM, *ibid.*), polazi od toga da tamna materija, u određenim režimima, ima superfluidno ponašanje. Prema ovoj teoriji, na galaktičkim skalama tamna materija ima dominantno superfluidno ponašanje i reprodukuju se aspekti koje predviđa modifikovana njutnovska dinamika. Na velikim skalama, tamna materija se ponaša kao CDM. Stoga, teorija SFDM reprodukuje kvalitete oba pristupa na odgovarajućim skalama, bez njihovih mana na skalama gde nisu uspešni.

Superfluidi

Jedna od karakteristika po kojoj se superfluidi razlikuju od običnih fluida je njihova viskoznost. Neke tečnosti (kao što je ${}^4\text{He}$) prelaze u superfluidnu fazu, na kritičnoj temperaturi $T_\lambda \sim 1 \text{ K}$, koja zavisi od pritiska fluida. Superfluid se, makroskopski, na temperaturama ispod T_λ , opisuje kao smeša dve komponente – normalne (ima viskoznost) i superfluidne (nema viskoznost), što je poznato kao Landauov dvokomponentni opis. Odnos gustina ovih komponenti zavisi od temperature. Što je temperatura bliža apsolutnoj nuli, superfluidna komponenta je zastupljenija. Na apsolutnoj nuli, ceo fluid se nalazi u superfluidnoj fazi. Na temperaturama iznad kritične postoji samo normalna faza, odnosno fluid je običan (Goodstein 1975).

Odsustvo viskoznosti u superfluidnoj komponenti implicira da će se svi slojevi superfluida kretati istom brzinom (*ibid.*):

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0 \quad (4)$$

gde je \vec{v} brzina superfluidne komponente. Tok za koji važi ova jednačina naziva se irrotacioni.

Posledica prethodne jednačine je da superfluid ne može da rotira uniformno, jer za takvu rotaciju važi $|\vec{\nabla} \times \vec{v}| = 2\omega$. Međutim, eksperimenti pokazuju da pri rotaciji suda sa superfluidom, pri određenim ugaonim brzinama, kompletan fluid rotira uniformno (*ibid.*). Ovo je moguće usled pojave dovoljnog broja vorteksa u superfluidu, koji efektivno daju uniformnu rotaciju.

Vorteks je deo fluida u kome čestice kruže oko cilindrične šupljine unutar fluida. Čestice oko vorteksa imaju samo tangencijalnu komponentu brzine oblika $v \sim \text{const}/r$. Centrifugalna sila stvara šupljinu unutar vorteksa duž ose rotacije koja se naziva jezgro vorteksa (kod ${}^4\text{He}$, poluprečnik jezgra je $\sim 10^{-10} \text{ m}$, što odgovara nizu atoma duž ose rotacije). Svuda osim u jezgru vorteksa važiće $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ (*ibid.*).

Vorteksi će se organizovati u koncentrične prstenove oko ose rotacije fluida. Duž prstena brzine susednih vorteksa će se delimično poništavati dok će se od ose rotacije u radialnom pravcu brzine sabirati i dati efektivno rotaciju krutog tela. Kako će polje brzine superfluida činiti polja brzine vorteksa, važiće jednačina (4)

(*ibid.*). Kritična ugaona brzina je minimalna ugaona brzina pri kojoj se formira jedan vorteks.

Mikroskopski opis superfluidnosti se bazira na Boze-Ajnštajnovom kondenzatu (eng. Bose-Einstein Condensate, u daljem tekstu BEC) (Pitaevskii i Stringari 2003). BEC je stanje bozonskog gasa na temperaturama bliskim apsolutnoj nuli, u kom najniže energetske stanje okupira makroskopski broj čestica. Kod idealnih Boze gasova na $T = 0$ sve čestice su u kondenzatu. Kod interagujućih Boze gasova na $T = 0$ nisu sve čestice u kondenzatu (zbog prisustva interakcije), ali i dalje makroskopski broj njih jeste. Kondenzat se javlja kod većine superfluida (kao što je ^4He) i odgovoran je za superfluidno ponašanja.

Berezijani–Kouri model superfluidne tamne materije

Berezijani i Kouri (u daljem tekstu BK) su pretpostavili da je tamna materija superfluid koji reprodukuje fenomenologiju MOND-a na galaktičkim skalama, a modela CDM na međugalaktičkim i kosmološkim skalama (Berezhiani i Khoury 2015). Koristeći efektivnu teoriju polja, dobili su jednačine koje opisuju takav superfluid. Masa čestica koje čine superfluid može se proceniti iz uslova nelokalizovanosti čestica, tj. da je de Broilijeva talasna dužina čestice $\lambda_{\text{dB}} = \frac{\hbar}{mv}$, gde je h Plankova konstanta, veća ili jednaka prosečnom rastojanju među česticama $l = \left(\frac{m}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}$ (*ibid.*).

Iz tog uslova dobija se gornja granica mase

$$m \leq \left(\frac{\rho h^3}{v^3}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Parametar Λ , koji određuje jačinu čestične interakcije u BK radu, određen je tako da reprodukuje MOND ubrzanje unutar galaksija. Iz tih pretpostavki zaključuje se da su to čestice mase $m \sim \text{eV}$ sa jakom međusobnom interakcijom $\Lambda \sim \text{meV}$ (*ibid.*).

BK procenjuju pri kojim temperaturama će tamna materija preći u superfluidnu fazu. U ovoj proceni aproksimiraju jako interagujuće bozone koji čine tamnu materiju slabo interagujućim bozonima. Iz veze između temperature i srednje

kinetičke energije čestice ($k_b T = \frac{1}{3} m v_c^2$, gde je v_c brzina pri kojoj je halo u dinamičkoj ravnoteži), pokazali su da je temperatura pri kojoj tamna materija prelazi u superfluidnu fazu $T_c \sim 1 \text{ mK}$. Zbog aproksimacije idealnog Boze gasa, broj čestica u kondenzatu (N_{kond}), koji je, u tom slučaju, identifikovan sa superfluidnom komponentnom, u odnosu na ukupan broj čestica (N) je $\frac{N_{\text{kond}}}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{\frac{3}{2}}$ za temperature haloa manje od

kritične. Ovako su pokazali su da je za haloe $M \sim 10^{12} M_{\odot}$ preko 95% čestica u kondenzatu (*ibid.*).

Ideja BEC haloa tamne materije ispitivana je i ranije (npr. Kain i Ling 2010, Rindler-Daller i Shapiro 2012), kada je tamna materija modelovana kao BEC bez ekscitacija, gde rotacione krive određuje profil gustine kondenzovanog haloa. U BK pristupu SFDM, ekscitacije generišu krivu rotacije i Barionsku Tali-Fišer relaciju. Standardni BEC pristupi tamnoj materiji su podrazumevali dominantnu dvočestičnu interakciju čestica, što vodi do $P \sim \rho^2$, dok je jednačina stanja kondenzata u BK teoriji SFDM (Berezhiani i Khoury 2015):

$$P = \frac{\hbar^6}{12c^4 m^6 \Lambda^2} \rho^3 \quad (5)$$

gde je ρ gustina a P pritisak. Ovu jednačinu možemo uporediti sa virijalnim razvojem:

$$P = k_b T \rho + g_2(T) \rho^2 + g_3(T) \rho^3 + \dots \quad (6)$$

gde prvi član opisuje idealni gas (kod koga čestice ne interaguju), drugi član daje doprinos jednačini stanja od dvočestične interakcije, treći član od tročestične interakcije, itd. Zavisnost $P \sim \rho^3$ sugeriše da čestice imaju zanemarljivu dvočestičnu interakciju i da primarno interaguju kroz tročestične procese.

BK rad daje grubu procenu kritične ugaone brzine haloa tamne materije pri kojoj se predviđa stvaranje vorteksa:

$$\Omega \approx \frac{\hbar}{mR^2} \quad (7)$$

gde je R poluprečnik haloa a $\hbar = h / 2\pi$ Dirakova konstanta. Ovaj izraz je aproksimacija izraza (Pitaevskii i Stringari 2003):

$$\Omega_c = \frac{l^2 \hbar}{mR^2} \cdot \ln\left(146 \cdot \frac{R}{\xi}\right) \quad (8)$$

gde je l ceo broj a ξ karakteristična dimenzija vorteksa. Međutim, ovaj izraz važi za homogene cilindrične laboratorijske sisteme bez uticaja spoljašnjeg polja (u našem slučaju gravitacionog), sa dominantnom dvočestičnom interakcijom.

U ovom radu se nećemo baviti ekscitacijama već samo opisom kondenzata. Opis kondenzata ovde je, za razliku od rada BK gde je dat preko efektivne teorije polja, izražen pomoću Gros-Pitaevski jednačine, koja će biti objašnjena u nastavku teksta. Taj pristup pruža konzistentan opis nerotirajućeg i rotirajućeg haloa (koji BK nisu modelovali), sa i bez vorteksa, na osnovu čega ćemo ispitati validnost procene kritične ugaone brzine date u izrazu (7). Vorteksi su jedna od predikcija modela BEC i SFDm, stoga su vredni proučavanja jer mogu služiti kao test ovih modela.

U daljem radu ćemo podrazumevati vrednosti $m = 0.6$ eV i $\Lambda = 0.2$ meV (Berezhiani i Khoury 2015), osim ako drugačije nije naznačeno.

Gros-Pitaevski jednačina

Jednačina koja opisuje stanje sistema N bozona u kvantnoj mehanici je Šredingerova jednačina (Rae i Napolitano 2007):

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \quad (9)$$

gde je ψ talasna funkcija sistema, koja sadrži sve informacije o sistemu, N broj čestica a i imaginarna jedinica. \hat{H} je hamiltonijan, operator koji je u vezi sa ukupnom energijom sistema. Ako sistem sadrži N međusobno interagujućih čestica u spoljnom potencijalu, hamiltonijan ima oblik:

$$\hat{H}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i + V_{\text{ext}}(\vec{r}_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad (10)$$

gde m predstavlja masu čestice, \vec{r}_i vektor položaja odgovarajuće čestice, V_{ext} je potencijalna energija spoljašnjeg polja koje deluje na sistem a V potencijalna energija interakcije parova čes-

tica. Član $-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i$ predstavlja kvantno-kinetički član hamiltonijana. Pošto je N reda veličine Avogadrovog broja, uvodimo aproksimaciju da se efekti koje čestice imaju jedna na drugu mogu zameniti usrednjenim pozadinskim potencijalom sa kojim interaguju. Ovaj pristup naziva se teorija srednjeg polja (Rogel-Salazar 2013).

Usrednjavanjem energetskih doprinosa svih čestica, poslednji član Šredingerove jednačine dobija sledeći oblik:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{\text{ext}}(\vec{r}) + d |\psi(\vec{r})|^2 \right) \psi(\vec{r}, t) \quad (11)$$

Ova jednačina naziva se vremenski zavisnom Gros-Pitaevski jednačinom (u daljem tekstu GPE) (*ibid.*). Član $d |\psi(\vec{r})|^2$ predstavlja usrednjenu potencijalnu energiju usled interakcije čestica. Ovaj oblik GPE pretpostavlja dominantnu dvo-čestičnu interakciju. U slučaju dominantne tro-čestične interakcije modifikovana GPE ima oblik (Pitaevskii i Stringari 2003):

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{\text{ext}}(\vec{r}) + g |\psi(\vec{r})|^4 \right) \psi(\vec{r}, t) \quad (12)$$

Mi ćemo dalje koristiti ovu jednačinu jer u teoriji BK čestice imaju dominantnu tročestičnu interakciju.

Iz uslova normalizacije talasne funkcije:

$$\int |\psi(\vec{r})|^2 d^3r = N \quad (13)$$

sledi

$$|\psi(\vec{r})| = \sqrt{\frac{\rho(\vec{r})}{m}} \quad (14)$$

gde je $\rho(\vec{r})$ gustina u nekom delu prostora. Predstavićemo talasnu funkciju u Ojlerovom obliku:

$$\psi(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r})| e^{iS(\vec{r}, t)} \quad (15)$$

gde je S faza talasne funkcije. Izražavanjem talasne funkcije u Ojlerovom obliku jednačina (12) se razdvaja na realan i kompleksan deo. Njihovim razdvajanjem dobijaju se dve jednačine:

$$-\frac{2m}{\hbar} |\psi(\vec{r})| \frac{\partial S}{\partial t} - |\psi(\vec{r})| \left((\vec{\nabla} S)^2 + \Delta |\psi(\vec{r})| - \frac{2m}{\hbar^2} (V_{\text{ext}} |\psi(\vec{r})| + g |\psi(\vec{r})|^5) \right) = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial |\psi(\vec{r})|}{\partial t} + \vec{\nabla} \left[|\psi(\vec{r})|^2 \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} S \right] = 0 \quad (17)$$

Jednačina (17) ima oblik jednačine kontinuiteta fluida, zbog čega definišemo struju verovatnoće kao:

$$\vec{j} = |\psi(\vec{r})|^2 \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} S \quad (18)$$

Na osnovu definicije gustine struje fluida, i veze gustine struje i brzine fluida $\vec{J} = \rho \vec{v}$, može se definisati brzina toka:

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} S \quad (19)$$

Ovakva definicija brzine zadovoljava uslov (jer je rotor gradijenta skalarne funkcije jednak nuli).

Modeli haloa

Halo tamne materije je modelovan kao skup bozona na niskoj temperaturi. U daljem radu podrazumevamo, osim ako drugačije nije naglašeno, da je centralna gustina haloa tamne materije $\rho_0 = 1.6 \times 10^{-23} \text{ kg/m}^3$ (Berezhiani i Khoury 2015). Čestice su u gravitacionom potencijalu Φ ($V_{\text{ext}} = m\Phi$), koji zadovoljava Poasonovu jednačinu (Binney i Tremaine 2008):

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho(r) \quad (20)$$

Poasonova jednačina daje potencijal gravitacionog polja iz raspodele gustine. Deljenjem jednačine (16) sa $|\psi(\vec{r})|$ i delovanjem gradijentom, uz korišćenje jednačina (14) i (19) dobija se:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{2} \vec{\nabla}(v^2) + \vec{\nabla} Q + \vec{\nabla} \Phi + \frac{\vec{\nabla} P_{\text{si}}}{\rho} = 0 \quad (21)$$

gde je $Q = -\frac{\hbar^2 \Delta \sqrt{\rho}}{2m^2 \rho}$ član koji predstavlja kvant-

no-mehanički pritisak a $P_{\text{si}} = \frac{2g}{3m^3} \rho^3$ pritisak koji potiče od međusobne interakcije čestica. Iz jednačine stanja dobijene iz GPE i jednačine stanja $P = \frac{\hbar^6}{12c^4 m^6 \Lambda^2} \rho^3$, koju su BK dobili iz efektivne teorije polja, može se uspostaviti korespondencija između konstante g , koja određuje interakciju čestica u GPE sa Λ i m iz rada BK i ona je

$g = \frac{\hbar^6}{8c^4 m^6 \Lambda^2}$. Jednačina (21) važi za nerotirajući sistem. Prebacivanjem u referentni sistem koji rotira ugaonom brzinom $\vec{\Omega}$ jednačina (21) postaje (Kibble i Berkshire 2004):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) + \vec{\nabla}(\vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r})^2 + \vec{\nabla} Q + \vec{\nabla} \Phi + \frac{\vec{\nabla} P_{\text{si}}}{\rho} = 0 \quad (22)$$

gde je sada \vec{v} brzina u rotirajućem referentnom sistemu.

Procena broja vorteksa u halou

U ranoj fazi stvaranja, haloj tamne materije dobili su moment impulsa usled plimskih interakcija sa strukturama na velikim skalama (Rindler-Daller i Shapiro 2012). Ukoliko je moment impulsa haloa tamne materije dovoljan za stvaranje vorteksa, sav moment impulsa će se prenositi na vortekse. Ukoliko halo ima kritični moment impulsa da nastane jedan aksisimetričan vorteks, sav moment impulsa će se preneti na taj vorteks, pa će polje brzine haloa biti polje brzine vorteksa, što ne daje uniformnu rotaciju. Ako je moment impulsa haloa dovoljan da nastane mnoštvo vorteksa, nastali vorteksi će se rasporediti po halou. Rezultujuće polje brzina daće efektivno uniformnu rotaciju celog haloa.

Spin parametar $\lambda = \frac{L\sqrt{E}}{GM^{5/2}}$ određuje odnos kinetičke energije rotacije i potencijalne energije. Što halo brže rotira, spin parametar je veći. Numeričkim simulacijama (*ibid.*) utvrđeno je da se spin parametar varira od 0.01 do 0.1. Ugaona brzina haloa se iz gornjeg izraza može približno izraziti kao:

$$\Omega \approx \lambda \sqrt{G\rho_c} \quad (23)$$

Pod pretpostavkom da halo rotira konstantnom ugaonom brzinom Ω , može se odrediti broj vorteksa u halou. U vorteksu će, dakle, važiti $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 2\pi \frac{\hbar}{m} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \vec{z}$ (Goodstein 1975), gde je \vec{r}_0 vektor položaja jezgra vorteksa, a δ Dirakova delta funkcija.

Cirkulacija fluida je linijski integral polja brzine fluida duž zatvorene konture. Cirkulacija superfluida u prisustvu vorteksa je:

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \frac{\hbar}{m} \oint \vec{v} S d\vec{l} = \frac{\hbar}{m} 2\pi l = \frac{\hbar l}{m} \quad (24)$$

gde je l ceo broj. S druge strane, kako se brzina ne menja duž kružne konture poluprečnika r :

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = 2\pi v r_{\perp} \quad (25)$$

Sledi da unutar vorteksa čestice imaju samo tangencijalnu komponentu oblika:

$$v = \frac{\hbar l}{m r_{\perp}} \quad (26)$$

gde je r_{\perp} udaljenost od ose simetrije vorteksa. Ispostavlja se da su vorteksi za koje je $l = 1$ biti stabilniji od ostalih (Pitaevskii i Stringari 2003) što ćemo i pokazati kasnije.

Cirkulacija oko celog haloa je:

$$\kappa_n = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = 2\pi \Omega R^2 = 2l\Omega A \quad (27)$$

gde je R poluprečnik haloa, a A površina kruga radijusa R . Koristeći Stoksovu teorem:

$$\kappa_n = \oint (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{A} = N_{\text{vor}} \frac{2\pi\hbar l}{m} \quad (28)$$

Iz (27) i (28), procena broja vorteksa unutar haloa je:

$$N = \frac{\Omega m R^2}{\hbar} = 45 \cdot 10^{23} \quad (29)$$

Vrednost Ω je ovde procenjena na osnovu spin parametra dok je za R uzet realističan poluprečnik tamnog haloa (Berezhiani i Khoury 2015). Iz jednačina (28) i (29) može se izraziti površina po vorteksu:

$$\frac{A}{N_{\text{vor}}} = \frac{\pi\hbar}{m\Omega} \quad (30)$$

Odatle je prosečna udaljenost između vorteksa:

$$R = \sqrt{\frac{N_{\text{vor}}\hbar}{m\Omega}} = 1.7 \cdot 10^{-7} \text{ pc.} \quad (31)$$

Pokazali smo da će se u halou pojaviti veliki broj vorteksa, što je konzistentno sa pretpostavkom o uniformnoj rotaciji.

Kako je halo stacionaran i rotira uniformno, član $(d\vec{v})/dt$ i članovi sa $\vec{\Omega}$ i \vec{v} u izrazu (22) su jednaki nuli. Kako je međusobna interakcija čestica jaka, može se pretpostaviti da se ravnotežno stanje haloa postiže izjednačavanjem gravitacione

sile i sile usred interakcije čestica, zanemarujući kvantno-mehanički pritisak. Režim u kome je ova pretpostavka validna naziva se Tomas-Fermijev režim (Rindler-Daller i Shapiro 2012). Jednačina (22) se tako svodi na jednačinu hidrostatičke ravnoteže:

$$\rho \vec{\nabla} \Phi + \vec{\nabla} P_{\text{si}} = -\vec{\nabla} V_{\text{cf}} \quad (32)$$

gde je $\vec{\nabla} V_{\text{cf}} = -\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$ gradijent centrifugalnog potencijala. U ovom radu razlikujemo dva slučaja u modelovanju haloa tamne materije: rotirajući i nerotirajući.

Model nerotirajućeg haloa

U slučaju nerotirajućeg haloa jednačina hidrostatičke ravnoteže je:

$$\rho \vec{\nabla} \Phi + \vec{\nabla} P_{\text{si}} = 0 \quad (33)$$

Zavisnost pritiska od gustine oblika $P = K\rho^{\frac{1}{n}+1}$ naziva se politropska jednačina stanja, indeksa politrope n . Uvođenjem smena (Prialink 2000):

$$\Xi = \frac{r}{\alpha} \quad (34)$$

$$\Theta^n = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (35)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{K(n+1)\rho_c^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G}} \quad (36)$$

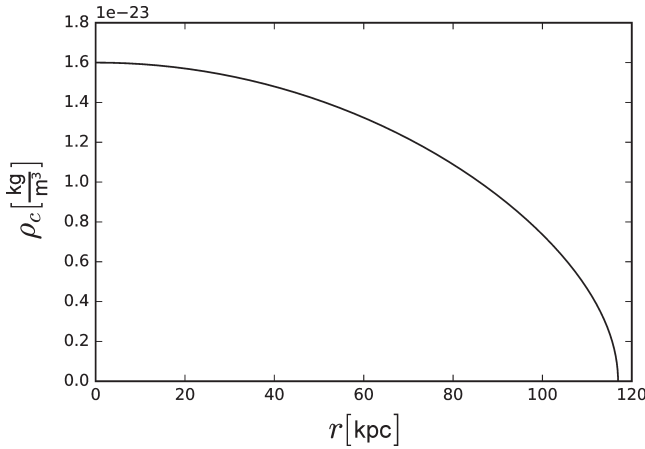
Jednačina hidrostatičke ravnoteže se uz Poasonovu jednačinu svodi na Lejn-Emdenovu jednačinu. U našem slučaju je $n = 1/2$ pa ona ima oblik:

$$\frac{1}{\Xi^2} \frac{d}{d\Xi} \left(\Xi^2 \frac{d\Theta}{d\Xi} \right) = -\sqrt{\Theta} \quad (37)$$

Jednačina se ne može rešiti analitički pa je rešena numerički RK4 metodom (Kiusalaas 2005). Profil gustine haloa, dobijen njenim rešavanjem, predstavljen je na slici 1.

Vidimo da profil gustine haloa superfluidne tamne materije, za razliku od NFW profila tipičnog za CDM model (Lisanti 2016):

$$\rho_{\text{NFW}} = \frac{\rho_c}{\frac{r}{r_s} \left(1 + \frac{r}{r_s} \right)^2} \quad (38)$$



Slika 1. Profil gustine haloa superfluidne tamne materije za centralnu gustinu haloa $\rho_0 = 16 \cdot 10^{-23}$ kg/m³

Figure 1. Density profile of superfluid dark matter halo for central halo density $\rho_0 = 16 \cdot 10^{-23}$ kg/m³

neće imati singularitet u $r = 0$, što je fizički realistično.

Model rotirajućeg haloa

Jednačina hidrostatičke ravnoteže (32) će sa prisutnom rotacijom biti parcijalna diferencijalna jednačina po dve promenljive: udaljenosti od centra haloa i polarnog ugla. Halo sporo rotira, zbog čega njegov oblik blago odstupa od sfere. Korišćenjem Kippenhahn-Tomas aproksimacije (Kippenhahn i Thomas 1970; Đukić 2017: 5, ovaj zbornik) ova parcijalna diferencijalna jednačina po dve promenljive svodi se na diferencijalnu jednačinu po jednoj promenljivoj, koordinati R koja se naziva srednji radijus. Srednji radijus predstavlja radijus sfere, čija je zapremina jednaka zapremini obuhvaćenoj odgovarajućom ekvipotencijalnom površi u halou. Sada jednačina hidrostatičke ravnoteže, kombinovanjem sa Poasonovom jednačinom, daje jednačinu strukture haloa koja se naziva modifikovana Lejn-Emden jednačina (*ibid.*):

$$\frac{1}{\Xi^2} \frac{d}{d\Xi} \left(\Xi^2 \frac{d\Theta}{d\Xi} \right) = -\sqrt{\Theta} + \nu \quad (39)$$

Pri čemu, u ovom slučaju, Ξ predstavlja bezdimenzionu dužinu koja odgovara srednjem radijusu, dok je Θ uvedeno kao u u jednačini (35).

Član ν je rotacioni član definisan kao:

$$\nu = \frac{\Omega^2}{2\pi G \rho_c} \quad (40)$$

Iz aproksimativne veze ugaone brzine i spin parametra (23), sledi $\nu = \frac{\lambda^2}{2\pi}$. Na osnovu dobijenog profila po srednjem radijusu, nije moguće naći profil po fizičkom radijusu i polarnom uglu, ali se mogu odrediti neke opservable koje su kumulativne (masa, moment inercije, itd.) (*ibid.*).

Tabela 1. Relativno odstupanje mase rotirajućeg haloa od mase nerotirajućeg haloa u zavisnosti od spin parametra

λ	$\frac{M(\lambda) - M(\lambda = 0)}{M(\lambda = 0)}$
0	0
0.02	10^{-4}
0.05	$6 \cdot 10^{-4}$
0.08	$1.2 \cdot 10^{-3}$
0.1	$2.3 \cdot 10^{-3}$

U tabeli 1 je pokazano da uticaj rotacije menja masu haloa, u odnosu na nerotirajući slučaj sa istom centralnom gustinom, za manje od 0.5%. Napominjemo da relativna masa haloa ne zavisi od izbora ρ_c i parametara modela tamne materije već samo od λ . Masa haloa je nađena na osnovu jednačine (Đukić 2017):

$$M = 4\pi\alpha^3 \rho_c \left(\frac{\xi^3 \lambda^2}{6\pi} - \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right)_{r=R} \quad (41)$$

gde je ν izraženo kao $\lambda^2/2\pi$. Stoga se može zaključiti da je uticaj rotacije zanemarljiv na profil gustine haloa. Time je aproksimacija profila gu-

stine rotirajućeg haloa profilom gustine nerotirajućeg haloa opravdana.

Određivanje kritične ugaone brzine haloa superfluidne tamne materije

U odeljku „Procena broja vorteksa u halou” je pokazano da je opravdano modelovati halo koji uniformno rotira za napomenute vrednosti parametara, dok je u ovom delu ta opravdanost ispitana na celom realističnom rasponu parametara modela tamne materije (m i Λ), kao i na rasponu realističnih centralnih gustina tamnog haloa. Ovde ćemo problemu pristupiti iz perspektive nalaženja kritične ugaone brzine, jer u slučaju ugaonih brzina bliskih kritičnoj pretpostavka uniformne rotacije haloa ne važi.

Da bismo odredili kritičnu ugaonu brzinu modelovaćemo halo sa jednim prisutnim aksisimetričnim vorteksom, čija se osa poklapa sa osom rotacije. Kako je vorteks stacionaran a sav moment impulsa rotirajućeg haloa je prenet na vorteks, jednačina (22) u slučaju vorteksa, za konkretan oblik P_{si} sa kojim radimo, ima oblik:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} (\vec{v}^2) + Q + \Phi + \frac{3}{2} \frac{P_{si}}{\rho} \right) = 0 \quad (42)$$

čijom integracijom se dobija

$$\frac{1}{2} (\vec{v}^2) + Q + \Phi + \frac{3}{2} \frac{P_{si}}{\rho} = \mu \quad (43)$$

gde je μ konstanta. Zamenom izraza $v = \frac{\hbar l}{mr_{\perp}}$,

$$P_{si} = \frac{2g}{3m^3} \rho^3, Q = -\frac{\hbar^2 \Delta \sqrt{\rho}}{2m^2 \rho} \text{ i } |\psi(\vec{r})| = \sqrt{\frac{\rho(\vec{r})}{m}}$$

dobijamo:

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r_{\perp}} \frac{\partial}{\partial r_{\perp}} \left(r_{\perp} \frac{\partial |\psi(\vec{r}_{\perp})|}{\partial r_{\perp}} \right) \right) + \frac{\partial^2 |\psi(\vec{r})|}{\partial z^2} + \\ & + \frac{\hbar^2 l^2}{2mr_{\perp}^2} |\psi(\vec{r})| + m\Phi(\vec{r}) |\psi(\vec{r})| + g |\psi(\vec{r})|^5 = \\ & = \mu |\psi(\vec{r})| \end{aligned} \quad (44)$$

Član $\frac{\hbar^2 l^2}{2mr^2} |\psi(\vec{r})|$ potiče od kinetičke energije rotacije vorteksa. U prvoj aproksimaciji pretpostavićemo homogen halo bez prisustva poten-

cijala ($\Phi = 0$). Kako je halo homogen i $\Phi = 0$, vorteks je simetričan duž z -ose, zbog čega je $\frac{\partial^2 |\psi(\vec{r})|}{\partial z^2} = 0$. Jednačina vorteksa se svodi na:

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r_{\perp}} \frac{\partial}{\partial r_{\perp}} \left(r_{\perp} \frac{\partial |\psi(\vec{r}_{\perp})|}{\partial r_{\perp}} \right) \right) + \frac{\hbar^2 l^2}{2mr_{\perp}^2} |\psi(\vec{r})| + \\ & + g |\psi(\vec{r})|^5 = \mu |\psi(\vec{r})| \end{aligned} \quad (45)$$

Za veliko r_{\perp} , član $\frac{\hbar^2 l^2}{2mr_{\perp}^2} |\psi(\vec{r})|$ je zanemarljiv, kao i članovi sa izvodima po r . Tada se jednačina svodi na:

$$|\psi_0| = \sqrt[4]{\frac{\mu}{g}} \quad (46)$$

gde je $|\psi_0|^2$ koncentracija balka. Pod balkom podrazumevamo deo haloa u kome se može zanemariti uticaj vorteksa.

Karakteristične dimenzije vorteksa dobijamo zahtevom da je rotaciona kinetička energija po apsolutnoj vrednosti približno jednaka energiji interakcije čestica:

$$\frac{\hbar^2}{2m\xi^2} = g \left(\frac{\rho_c}{m} \right)^2 \quad (47)$$

Odatle je:

$$\xi = \sqrt{\frac{m\hbar^2}{2g\rho_c^2}} \quad (48)$$

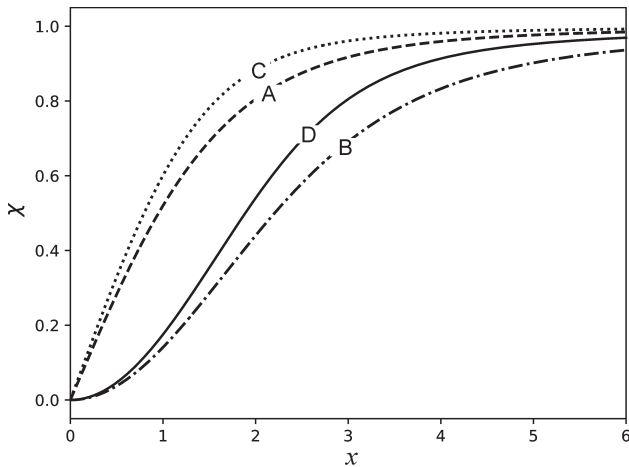
Ova dužina predstavlja tipičnu udaljenost na kojoj gustina sistema postaje jednaka gustini balka. Za naše parametre, ξ iznosi približno 0.5 mm.

Uvodeći smene $x = \frac{r_{\perp}}{\xi}$ i $\chi = \frac{|\psi(\vec{r})|}{|\psi(0)|}$, jednačina

vorteksa se u ovoj aproksimaciji svodi na:

$$-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{d\chi}{dx} \right) + \frac{\chi}{x^2} l^2 + \chi^5 - \chi = 0 \quad (49)$$

Rešenje ove jednačine daje profil gustine vorteksa. Do sada je ovakva jednačina vorteksa rešavana samo u slučaju dvočestične interakcije (Pitaevskii i Stringari 2003), dok je u ovom radu, rešavana u tro-čestičnom slučaju. Jednačina se može rešiti numerički koristeći metod konačnih razlika (Kiusalaas 2005), kojim se diferencijalna jednačina razbija na sistem algebarskih jedna-



Slika 2. Rešenje jednačine vorteksa za dominantnu dvočestičnu interakciju u slučaju $l = 1$ (A) i slučaju $l = 2$ (B), dominantnu tročestičnu interakciju u slučaju $l = 1$ (C) i $l = 2$ (D). Sa A i C su obeležena su rešenja jednačine vorteksa u našem slučaju.

Figure 2. Dashed line represents the solution of the vortex equation for: A – dominant two-particle interaction with $l = 1$, B – dominant two-particle interaction with $l = 2$, C – dominant three-particle interaction with $l = 1$, D – dominant three-particle interaction with $l = 2$. A and C lines represent the solution of the vortex equation in our case.

čina. U ovom slučaju to će biti sistem nelinearnih jednačina, koji se dalje može rešiti Njtn-Rafsonovom metodom (*ibid.*). Numeričko rešenje ove jednačine, upoređeno sa numeričkim rešenjem dvočestične GPE jednačine u slučaju vorteksa prikazano je na slici 2, a detaljno opisano u prilogu A.

Određivanje kritične ugaone brzine za formiranje vorteksa

Pomoću modela haloa tamne materije i aksimetričnog vorteksa možemo odrediti energiju haloa sa vorteksom i energiju haloa bez vorteksa. Ukoliko pretpostavimo da će se vorteks formirati ako je sistem sa vorteksom stabilniji, možemo proceniti kritičnu ugaonu brzinu za formiranje vorteksa.

Neka je E_1 energija haloa sa vorteksom, E_0 energija haloa bez vorteksa, onda je energija vorteksa $E_v = E_1 - E_0$. U referentnom sistemu koji rotira ugaonom brzinom Ω , energija vorteksa E_v^* je (Pitaevskii i Stringari 2003):

$$E_v^* = E_v - \bar{\Omega} \cdot \bar{L} \quad (50)$$

gde je $L = N\hbar = \hbar \frac{M}{m}$ moment impulsa vorteksa.

Vorteksi će se formirati ako je stanje sistema sa vorteksom stabilnije od stanja bez vorteksa, tj. kada je $E_v^* \leq 0$. To se dešava pri ugaonim brzinama haloa većim od kritične ugaone brzine Ω_c , koja zadovoljava jednakost:

$$E_v - \Omega_c L = 0 \quad (51)$$

iz čega se može izraziti kritična ugaona brzina:

$$\Omega_c = \frac{m}{\hbar M} (E_1 - E_0) \quad (52)$$

U opštem slučaju, energija sistema talasne funkcije $\psi(\vec{r}, t)$ je (Rae i Napolitano 2007):

$$E = \int \psi^* \hat{H} \psi d^3r \quad (53)$$

Energija vorteksa se u našem slučaju svodi (na osnovu jednačina (51) i (53)) na:

$$E_v = \frac{2Rl^2 \pi n \hbar^2}{m} \int_0^R \left[\left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + \frac{\chi^2}{x^2} l^2 + \frac{1}{2} \chi^6 - \chi^2 + \frac{1}{2} \right] x dx \quad (54)$$

Numeričko određivanje integrala iz jednačine (54) je opisano u prilogu B.

Analizirajući profil gustine vorteksa (slika 2) vidimo da će važiti $\lim_{x \rightarrow \infty} \chi = 1$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d\chi}{dx} = 0$.

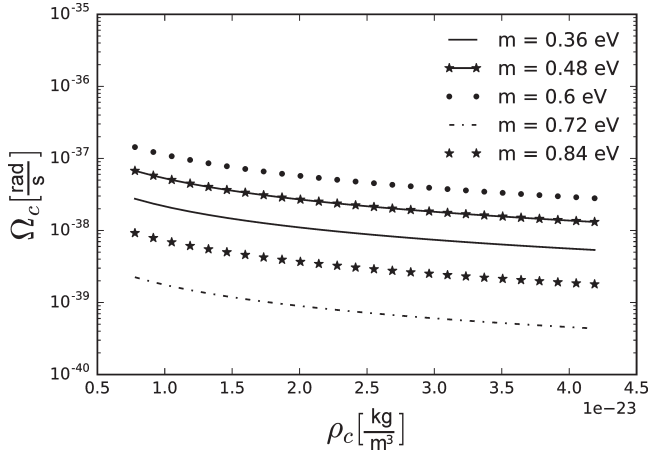
Asimptotsko rezonovanje ukazuje da će drugi član podintegralne funkcije biti dominantan. Stoga će E_v biti oblika:

$$E_v \approx \frac{2Rl^2 \pi n \hbar^2}{mn} \ln \left(\frac{R}{\xi} \right) \quad (55)$$

Iz (51) i poslednjeg izraza se može dobiti kritična ugaona brzina, znajući zapreminu haloa:

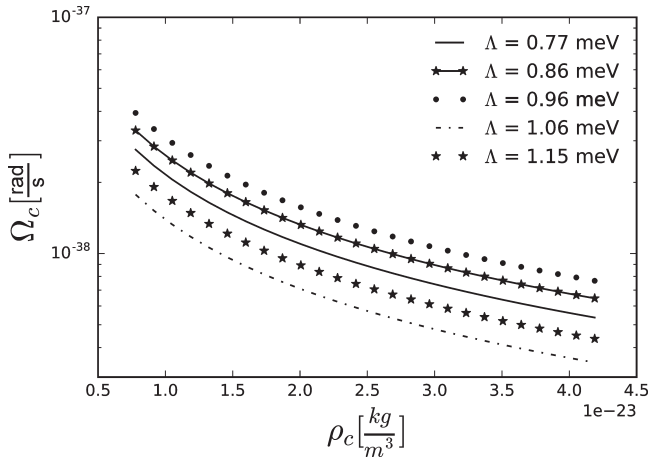
$$\Omega_c = \frac{3l^2 \hbar}{2mR^2} \ln \left(\frac{R}{\xi} \right) \quad (56)$$

Na slikama 3 i 4 su prikazane vrednosti Ω_c , dobijene na osnovu izraza (51) i (54), na relevantnom rasponu centralnih gustina haloa (Martini



Slika 3. Zavisnost kritične ugaone brzine u zavisnosti od centralne gustine haloa tamne materije za različite vrednosti mase čestice i $\Lambda = 0.96$ meV

Figure 3. Dependency of critical angular velocity depending on the central density of dark matter halo for different particle mass values and $\Lambda = 0.96$ meV



Slika 4. Zavisnost kritične ugaone brzine u zavisnosti od centralne gustine haloa tamne materije za različite vrednosti parametra Λ i $m = 0.6$ eV

Figure 4. Dependency of critical angular velocity depending on the central density of dark matter halo for different values of parameter Λ and $m = 0.6$ eV

nović 2015) i parametara modela (Hodson *et al.* 2016). Na osnovu izraza $\Omega \approx \lambda \sqrt{G\rho_c}$ dobijen je raspon realističnih ugaonih brzina tamnih haloa od $2 \cdot 10^{-20}$ do $5.2 \cdot 10^{-17} \text{ s}^{-1}$. Grafici na slikama 3 i 4 pokazuju da su kritične ugaone brzine na potpunom prostoru parametara daleko manje od realističnih ugaonih brzina haloa. Zaključujemo da, ukoliko BK model dobro opisuje tamnu materiju, veliki broj vorteksa bi se morao javiti u tamnim haloima galaksija.

Određivanje kritične ugaone brzine BEC haloa u literaturi

U radu Kejna i Linga (Kain i Ling 2010) napravljen je model BEC haloa tamne materije sa aksisimetričnim vorteksom čija se osa poklapa sa osom rotacije. Iz GPE i Poasonove jednačine

dobijaju linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu po cilindričnom radijusu i z koordinati, koja daje opis haloa, čijim analitičkim rešavanjem dobijaju profil gustine haloa u zavisnosti od z i cilindričnog r (jednačina 4.6 u radu (*ibid.*)). Mana njihovog modela je to što oni halo i vorteks opisuju u Tomas-Fermijevom režimu. Stoga nemaju opis vorteksa u blizini ose rotacije jer je tu Tomas-Fermijev režim neprimenjiv. Kejn i Ling su podrazumevali dominantnu dvočestičnu interakciju, jer rade sa BEC modelom tamne materije. U slučaju tročestične interakcije, jednačina koja opisuje halo bila bi nelinearna parcijalna diferencijalna jednačina. Nije poznat postupak kojim bi se ova jednačina mogla rešiti analitički, dok bi njeno numeričko rešavanje moglo biti tema daljeg rada.

Rindler-Deler i Šapiro (Rindler-Daller i Shapiro 2012) su u svom radu modelovali BEC halo tamne materije u dva slučaja – sa minimalnim momentom impulsa dovoljnim da se stvori jedan vorteks, kao i momentom impulsa znatno većim od minimalnog. U prvom slučaju je halo aproksimiran irotacionim Rimanovim-S elipsoidom koji se transformiše u sferu sa aksisimetričnim vorteksom duž ose rotacije. U drugom slučaju se u Maklorenovom sferoidu formira aksisimetričan vorteks duž ose rotacije. Oba slučaja omogućavaju da se kritična ugaona brzina izrazi analitički kao funkcija radijusa haloa, tipične udaljenosti na kojoj gustina sistema postaje jednaka gustini balka i parametra koji određuju oblik haloa.

U oba rada (Kain i Ling 2010; Rindler-Daller i Shapiro 2012), kao i u ovom, procena kritične ugaone brzine je izvršena energetski. Analitički pristup u datim radovima omogućava jasan uvid u doprinose pojedinačnih članova pri proračunu energije vorteksa. Iako se modeli haloa i vorteksa u našem i ova dva rada razlikuju po aproksimacijama, kao i dominantnoj prirodi međučestične interakcije koje su korišćene, zbog različite pretpostavljene prirode interakcija između čestica tamne materije, svi oni potvrđuju da je dominantan član, u limesu $R \gg \xi$, u određivanju kritične ugaone brzine oblika $\frac{\hbar^2}{mR^2} \ln\left(\frac{R}{\xi}\right)$ koji potiče od

kinetičke energije rotacije, dok ostali članovi variraju procenu za najviše jedan red veličine. Isti član je dominantan i pri proceni kritične ugaone brzine laboratorijskih sistema gde se podrazumeva dominantna dvočestična interakcija (Pitaevskii i Stringari 2003). Stoga je opravdano korišćenje aproksimacije kritične ugaone brzine koja važi za homogen cilindrični laboratorijski sistem bez uticaja spoljašnjeg polja u radu BK.

U slučaju SFDM teorije, za relevantni prostor parametara teorije i haloa, jasno je da je kritična ugaona brzina mnogo manja od ugaonih brzina haloa tamne materije pa nema potrebe za sofisticiranijim modelom koji bi eliminisao mane našeg i gore navedenih modela.

Zaključak

Napravljen je model rotirajućeg i nerotirajućeg haloa tamne materije za čestice postulirane

u teoriji BK. Halo je modelovan Gros-Pitaevski jednačinom sa dominantnom tročestičnom interakcijom. U slučaju rotirajućeg haloa ustanovljeno da je uticaj rotacije zanemarljiv na profil gustine. Modelovan je aksisimetričan vorteks čija je osa simetrije osa rotacije haloa, pod pretpostavkom homogenog haloa i zanemarivanjem gravitacionog potencijala. Dobijen je profil gustine vorteksa. Na osnovu modela potvrđena je procena kritične ugaone brzine za stvaranja vorteksa u halou iz (Berezhiani i Khoury 2015). Odnos ugaonih brzina tamnih haloa i kritične ugaone brzine sugerise da, ako model Berezijanija i Kourija dobro opisuje tamnu materiju, bi veliki broj vorteksa trebao biti prisutan u tamnim haloima galaksija. Poređenjem sa drugim radovima (Kain i Ling 2010, Rindler-Daller i Shapiro 2012) ustanovljeno je da uzimanje u obzir tročestične umesto dvočestične interakcije čestica ne utiče značajno na procenu kritične ugaone brzine. Zbog male energije vorteksa njihova direktna detekcija, u modelu SFDM, je teško moguća (Berezhiani i Khoury 2015).

Zahvalnost. Želimo da izrazimo zahvalnost Jovanu Božuti, na pojašnjanju vektorske analize, kao i Vladanu Đukiću, na mnoštvu korisnih saveta i objašnjenja.

Literatura

- Berezhiani L., Khoury J. 2015. Theory of dark matter superfluidity. *Physical Review D*, **92**: 103510
- Binney J., Tremaine S. 2008. *Galactic Dynamics*. Princeton University Press
- Đukić V. 2017. Univerzalnost I-Love-Q relacija kod belih patuljaka. *Petičke sveske*, 75: 5.
- Goodstein D. 1975. *States of Matter*. New York: Prentice Hall
- Hodson A., Zhao H., Khoury J., Famaey B. 2016. Galaxy Clusters in the Context of Superfluid Dark Matter. *Astronomy & Astrophysics*, manuscript no. 30069, u štampi
- Kain B., Ling H. Y. 2010. Vortices in Bose-Einstein condensate dark matter. *Physical Review D*, **82**: 064042.
- Kibble T., Berkshire F. 2004. *Classical Mechanics*. London: Imperial College Press

Kippenhahn R., Thomas H. 1970. A Simple Method for the Solution of the Stellar Structure Equations Including Rotation and Tidal Forces. U *Stellar Rotation* (ur. A. Slettebak). Springer, str. 20-29.

Kiusalaas J. 2005. *Numerical Methods in Engineering with Python*. Cambridge University Press

Lisanti M. 2017. Lectures on Dark Matter Physics. U *New Frontiers in Fields and Strings (TASI 2015) – Proceedings of the 2015 Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics'* (ur. J. Polchinski et al.): Singapur: World Scientific, str. 399-446.

Martinović N. 2015. Halo Statistics Analysis within Medium Volume Cosmological N-Body Simulation. *Serbian Astronomical Journal*, **190**: 11.

Pitaevskii L., Stringari S. 2003. *Bose-Einstein Condensation*. Oxford University Press

Prialnik D. 2000. *An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution*. Cambridge University Press

Rae A., Napolitano J. 2007. *Quantum Mechanics*. Boca Raton: CRC Press

Rindler-Daller T., Shapiro R.P. 2012. Angular Momentum and Vortex Formation in Bose-Einstein-Condensed Cold Dark Matter Haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **422** (1): 135.

Rogel-Salazar J. 2013. The Gross-Pitaevskii equation and Bose-Einstein condensates. *European Journal of Physics*, **34**: 247.

Zhao H., Famaey B. 2006. Refining MOND interpolating function and TeVeS Lagrangian. *The Astrophysical Journal*, **638** (1): L9.

condensate and the phonons reproduce the effects of modified Newtonian dynamics. In the theory of superfluidity, vortices emerge when the halo is rotating with an angular velocity greater than the critical angular velocity for vortex formation. Berezhiani and Khoury evaluate this critical angular velocity by implementing a relation derived for systems in laboratory conditions. In this work, a dark matter halo and vortex were modeled, with the vortex being positioned along the rotational axis of the halo. This was achieved by solving the modified Gross-Pitaevskii equation for the condensate of dark matter particles. This approach provides a consistent description of the stationary and rotating halo with and without vortices. The halo density profile in the stationary and rotating case was evaluated, in the latter case using the Kippenhahn-Thomas approximation. The density profile for the vortex and its critical angular velocity in a halo were determined, and were found to be in agreement with the one estimated in the paper by Berezhiani and Khoury.

Nikola Savić and Predrag Despotović

Rotating Superfluid Dark Matter Halos

The theory of superfluid dark matter developed in the paper by Berezhiani and Khoury (2015) reproduces modified Newtonian dynamics on galactic scales, while its large-scale behavior exhibits the properties of cold dark matter. In this theory, the galactic halo of dark matter is a

Prilog A: Numeričko rešenje modifikovane GPE za vorteks

Metod konačnih razlika (Kiusalaas 2005) funkcioniše tako što se interval $[a, b]$ u kome se rešava jednačina izdela na m jednakih intervala dužine h . Neka je $x_i = a + ih$ i $f(x)$ rešenje date jednačine gde je $i = 0, 1, \dots, m$ indeks koraka. Svako x_i daje y_i koje zadovoljava $y_i = f(x_i)$. Koristeći polaznu diferencijalnu jednačinu, u ovom slučaju diferencijalnu jednačinu drugog reda, može se zapisati algebarska jednačina za svaku tačku (x_i, y_i) koristeći aproksimaciju za prvi i drugi izvod y po x . Dobija se sistem od $m - 1$ algebarskih jednačina sa $m + 1$ nepoznatih.

Još dve jednačine dolaze iz graničnih uslova koje zadovoljava rešenje jednačine na tom intervalu. Jednačina u našem slučaju se rešava na intervalu $[0, +\infty]$ sa graničnim uslovima:

$$\chi_0 = 0 \quad (57)$$

$$\chi_{x \rightarrow \infty} = 1 \quad (58)$$

Drugi granični uslov dolazi iz asimptotskog ponašanja funkcije χ , odnosno toga da gustina teži gustini balka. Uvodimo smenu $x = \tan z$, kako bismo sveli interval na kome se rešava jednačina na konačan. Jednačina u novim koordinatama se rešava na ograničenom intervalu $[0, \pi/2]$. Sistem jednačina uz granične uslove je oblika:

$$\chi_0 = 0 \quad (59)$$

$$\chi_{i-1}k_1 + \chi_i k_2 - \chi_i^5 + \chi_{i+1}k_3 = 0$$

$$i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (60)$$

i:

$$\chi_m = 1 \quad (61)$$

gde su:

$$k_1 = \cos z + \cos^3 z \sin z \Delta z - \frac{\cos^3 z}{2 \sin z} \Delta z,$$

$$k_2 = \Delta z^2 - 2 \cos^4 z - l^2 \frac{\cos^2 z}{\sin^2 z} \Delta z^2$$

$$k_3 = \cos^4 z + \frac{\cos^3 z}{2 \sin z} \Delta z - \cos^3 z \sin z \Delta z$$

a z korak. Ovako je problem sveden na kvadratni sistem nelinearnih algebarskih jednačina koje se mogu rešiti Njutn-Rafson metodom (*ibid.*).

Neka su $\vec{f}(\vec{y}) = [f_0(\vec{y}) \dots f_n(\vec{y})]$ i $\vec{y} = [y_0 \dots y_n]$ vektori istih dužina koji predstavljaju sistem jednačina i njegove nepoznate:

$$\vec{f}(\vec{y}) = \vec{0} \quad (62)$$

U našem slučaju:

$$f_0(\vec{\chi}) = \chi_0 \quad (63)$$

$$f_i(\vec{\chi}) = \chi_{i-1}k_1 + \chi_i k_2 - \chi_i^5 + \chi_{i+1}k_3$$

$$i \in \{1, 2, \dots, m-1\} \quad (64)$$

$$f_m(\vec{\chi}) = \chi_m \quad (65)$$

gde je $\vec{\chi} = \vec{\chi}(\vec{z})$, a $\vec{z} = [z_0 \dots z_m]$ predstavlja nezavisne promenljive sistema jednačina. Da bismo rešili ovaj sistem razvićemo $\vec{f}(\vec{\chi} + \Delta\vec{\chi})$ u Tejlorov red oko vrednosti $\vec{\chi}$. Zanimajući sve članove koji sadrže druge i više izvode $\vec{f}(\vec{\chi})$ dobija se:

$$f_i(\vec{\chi} + \Delta\vec{\chi}) \approx f_i(\vec{\chi}) + \sum_{j=0}^m \frac{\partial f_i}{\partial \chi_j} \Delta\chi_j \quad (66)$$

Pretpostavimo da je $\vec{\chi}$ trenutna aproksimacija rešenja sistema i da je $\vec{\chi} + \Delta\vec{\chi}$ „tačno” rešenje sistema, tako da je $|\Delta\vec{\chi}| \ll |\vec{\chi}|$. Zapisivanjem poslednjeg izraza u matricnoj formi dobijamo:

$$\vec{0} = \vec{f}(\vec{\chi}) + \hat{J}(\vec{\chi})\Delta\vec{\chi} \quad (67)$$

gde je $\hat{J}(\vec{\chi})$ kvadratna matrica takva da je svaki njen član $J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \chi_j}$. U našem slučaju:

$$\hat{J}(\vec{\chi}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ k_1(z_1) & I & k_3(z_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & k_1(z_m) & N & k_3(z_m) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (68)$$

gde je $I = k_2(z_1) - 5\Delta z^2 \chi_1^4$, a $N = k_2(z_m) - 5\Delta z^2 \chi_m^4$.

Rešavajući gornju jednačinu dobija se nova aproksimacija rešenja $\vec{\chi} + \Delta\vec{\chi}$ za koju se algoritam može ponoviti i dobiti sledeća vrednost rešenja jednačina, koja je bliža tačnom rešenju sistema. Veoma je bitno dobro proceniti početnu rešenje $\vec{\chi}$, jer u suprotnom može se desiti da novo $\vec{\chi}$ ne iterira ka „tačnom” rešenju. Za rešavanje jednačine vorteksa u prvoj iteraciji smo pretpostavili linearnu zavisnost $\chi(z)$.

Prilog B: Numeričko određivanje energije vorteksa

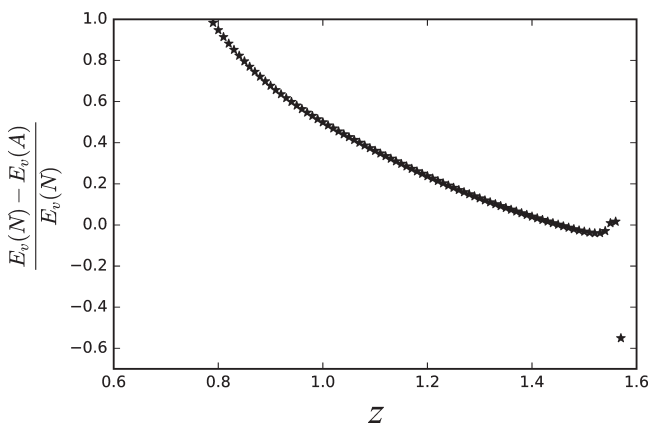
U ovom odeljku je opisan način na koji je evaluirana energija aksisimetričnog vorteksa. Problem se svodi na određivanje integrala iz jednačine (54):

$$E_v = \int_0^{\frac{R}{\xi}} \left[\left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + \frac{\chi^2}{x^2} l^2 + \frac{1}{2} \chi^6 - \chi^2 + \frac{1}{2} \right] x dx \quad (69)$$

gdje je numeričko određivanje funkcije $\chi(x)$ opisano u prologu A. Kako bismo koristili trapezoidno pravilo (Kiusalaas 2005) sa ekvidistantnim korakom, smenom $x = \tan z$, kao u prilogu A, integral energije prelazi u oblik:

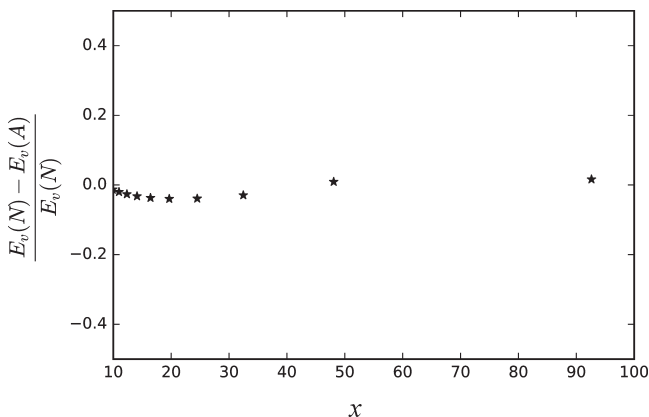
$$E_v = \int_0^{\frac{R}{\xi}} \left[\left(\frac{d\chi}{dx} \cos^2 z \right)^2 + \frac{\chi^2}{\tan^2 z} l^2 + \frac{1}{2} \chi^6 - \chi^2 + \frac{1}{2} \right] \frac{\tan z}{\cos^2 z} dz \quad (70)$$

Pozivajući se na asimptotsku analizu jednačine (54) ($x \rightarrow \infty, z \rightarrow \frac{\pi}{2}$) integral (69) se može aproksimirati izrazom $\ln \frac{R}{\xi}$. Grafik na slici 5 pokazuje relativno odstupanje aproksimacije $\ln \frac{R}{\xi}$ od numeričke vrednosti integrala. Vidi se da se sa rastom radijalne koordinate povećava preciznost aproksimacije što je i očekivano. Međutim poslednja tačka na grafiku pokazuje da aproksimacija



Slika 5. Relativno odstupanje analitičke aproksimacije integrala $E_v(A)$ od njegove numeričke vrednosti $E_v(N)$. Nezavisna promenljiva z je bezdimenziona koordinata u kojoj je određen numerički integral.

Figure 5. Relative deviation of the analytical integral approximation $E_v(A)$ from numerical value $E_v(N)$. Independent variable z is the dimensionless coordinate in which the numerical value of the integral was obtained.



Slika 6. Relativno odstupanje analitičke aproksimacije integrala $E_v(A)$ od njegove numeričke vrednosti $E_v(N)$. Poslednja tačka sa grafika sa slike 5 je odbačena, a nezavisna promenljiva x je fizička udaljenost u karakterističnim dužinama vorteksa.

Figure 6. Relative deviation of the analytical integral approximation $E_v(A)$ from numerical value $E_v(N)$. The last point from Graph 5 is discarded and the independent variable x is the physical distance in units of the vortex's characteristic length scale.

značajno odstupa od numerički određene vrednosti. Razlog za to je singularnost (pri deljenju sa $\cos^2 z$ u blizini $\pi/2$) koja je posledica prelaska iz x u z koordinatu. Kako je razlog odstupanja promena koordinata a ne osobina podintegralne funkcije (što se može videti iz (69)), opravdano je odbaciti poslednju tačku. Na slici 6 je pokazano relativno odstupanje analitičke aproksimacije od numeričke vrednosti integrala sa x koordinatom i odbačenom poslednjom tačkom.

