Vladan Đukić

Univerzalnost I-Love-Q relacija kod belih patuljaka

Ispitana je univerzalnost I-Love-Q relacija, tj. relacija između momenta inercije, Lavovog broja i kvadrupolnog momenta, kod belih patuljaka, pri promeni realistične jednačine stanja i ugaone brzine. Moment inercije opisuje inertnost tela pri rotaciji, Lavov broj kvantifikuje deformabilnost objekta pri rotaciji, a kvadrupolni moment kvantifikuje odstupanje oblika tela od sferne simetrije, u kontekstu njegovog gravitacionog polja. Iako ove veličine zavise od jednačine stanja, skoro je pokazano da su kod neutronskih zvezda relacije između pogodno normalizovanih vrednosti ovih veličina nezavisne od izbora realistične jednačine stanja materije i ugaone brzine u režimu spore rotacije. Cilj ovog rada je da ispita da li ovakve relacije ispoljavaju istu osobinu i u slučaju belih patuljaka. Jednačine stanja na kojima je univerzalnost ispitivana su politropske jednačine stanja sa politropskim indeksima $n = 1.5$ *i* $n = 3$ *i Čandrasekarova jednačina stanja na* $T = 0$ *K. Struktura sporo-rotirajućih belih patuljaka je modelovana na osnovu Kipenhan-Tomasove aproksimacije. Moment inercije je izračunat na osnovu rešenja jednačine strukture, koje je dobijeno numerički. Lavov broj i kvadrupolni moment su dobijeni na osnovu rešenja jednačine strukture i modifikovane Kler-Radau jednačine, koja je takođe rešena numerički. Za ove jednačine stanja ustanovljena je univerzalnost u nerotirajućem slučaju sa odstupanjem manjim od 6% za I-Q, 1.5% za I-Love, odnosno 4% u slučaju Q-Love relacija, u odnosu na I-Love-Q relacije za nerotirajuću* $n = 1$ *politropu. Pokazano je da spora rotacija ne remeti univerzalnost relacija kod Čandrasekarove jednačine stanja na* $T = 0$ *K, jer je relativno odstupanje od univerzalnosti manje od 6% za I-Q i I-Love relacije, odnosno manje od 2% za Q-Love relacije u odnosu na nerotirajuće* $n = 1$ *politrope.*

Vladan Đukić (1997), Novi Sad, Seljačkih buna 55, učenik 4. razreda Gimnazije Jovan Jovanović Zmaj u Novom Sadu

MENTOR: Mateja Bošković, Istraživačka stanica Petnica

Uvod

Kompaktni zvezdani objekti predstavlju konačnu fazu u evoluciji zvezda. Zbog velikih gustina i masa koje imaju ovi objekti, njihovo modelovanje zahteva korišćenje kvantne mehanike i opšte teorije relativnosti, zbog čega su sa aspekta teorijske fizike značajni za proučavanje. Proučavanje njihovih osobina omogućava proveravanje postojećih fizičkih teorija u ekstremnim režimima i ostavlja mogućnost potencijalnog otkrivanja nove fizike. Zbog nedostatka znanja iz nuklearne fizike na određenim energetskim skalama, postoji nekoliko modela stanja materije u neutronskim zvezdama (NZ) od kojih ni jedan nije dovoljno pouzdan (Yagi i Yunes 2013).

Sa stanovišta posmatračke astrofizike ovo je problem, jer opservable NZ zavise od njihove strukture, za čiji opis je potrebno pouzdano poznavanje jednačine stanja NZ. Možemo ilustrovati ovaj problem na primeru relacija mase i radijusa (relacije M-R) kod NZ. Ukoliko bismo posmatrački odredili masu NZ, na osnovu ovih relacija ne bismo mogli da dobijemo jedinstveno teorijsko predviđanje radijusa ovog objekta, jer različite realistične jednačine stanja dovode do netrivijalnih razlika u M-R relacijama. Jedno od mogućih rešenja ovog problema je nalaženje relacija između opservabli koje ne zavise značajno od jednačine stanja, odnosno unutrašnje sturkutre NZ. Nedavno je pokazano (*ibid.*) da su relacije između pogodno normalizovanih vrednosti momenta inercije, Lavovog broja i kvadrupolnog momenta (I-Love-Q relacije) kod NZ univerzalne, odnosno da ne zavise od izbora realistične jednačine stanja, kao i ugaone brzine u režimu spore rotacije (Doneva *et al*. 2014). Moment inercije opisuje inertnost krutih tela pri rotaciji, Lavov broj kvantifikuje deformabilnost objekta pri rotaciji, a kvadrupolni moment kvantifikuje odstupanje oblika tela od sferne simetrije u kontekstu njegovog gravitacionog polja. U literaturi (Yagi i Yunes 2013) je takođe pokazano da se I-Love-Q relacije mogu primeniti u posmatračkoj astrofizici, astrofizici gravitacionih talasa i testiranju opšte relativnosti u ekstremnim režimima.

Sličan problem postoji i kod druge klase kompaktnih zvezdanih objekata, belih patuljaka (BP). Razumevanje strukture BP zasnovano je na ranim radovima S. Čandrasekara, u kojima se stanje materije u BP modeluje relativističkom jednačinom stanja degenerisanog elektronskog gasa na $T = 0$ K (Chandrasekhar 1934). Jedan od glavnih rezultata ovog rada je otkriće postojanja granične mase BP, Čandrasekarove mase. Detaljnija analiza stanja plazme u BP na $T = 0$ K urađena je od strane E. Salpetera (Salpeter 1961). Skora istraživanja strukture BP (Carvalho *et al*. 2014; Boshkayev *et al*. 2016*a*; Rotondo *et al*. 2010) pokazala su da se odstupanja relacije M-R računate na osnovu degerisanog opisa od posmatračkih podataka javljaju zbog neadekvatnosti $T = 0$ K aproksimacije kod BP malih masa (Carvalho *et al*. 2014). Kao rešenje problema predložen je relativistički Feynman-Metropolis-Teller (FMT) opis stanja materije na $T = 0$ K (Carvalho *et al*. 2014).

Ovaj problem, kao i činjenica da I-Love-Q univerzalnost ne važi kod stabilnih zvezda (Yagi *et al*. 2014), motiviše potrebu da se I-Love-Q relacije izračunaju za BP i ispita njihova univerzalnost. Pošto I-Love-Q univerzalnost važi kod NZ, crnih rupa i još nekih egzotičnih kompaktnih objekata (Yagi i Yunes 2013; Yagi *et al*. 2014; Yagi i Yunes 2016), ukoliko bi isto bio slučaj i kod BP, to bi išlo u prilog postojanja aproksimativne emergentne simetrije svojstvene kompaktnim zvezdanim objektima koja se predlaže u literaturi (Yagi *et al*. 2014), a koja je odgovorna za invarijantnost

I-Love-Q relacija u odnosu na promenu jednačine stanja i ugaone brzine u režimu spore rotacije.

U ovom radu je ispitana univerzalnost I-Love-Q relacija za BP čije je stanje materije opisano politropskom jednačinom stanja i Čandrasekarovom jednačinom stanja na $T = 0$ K.

Modelovanje strukture belih patuljaka

Jednačina strukture

Najjednostavniji model zvezde podrazumeva nerotirajuću zvezdu, bez magnetnog polja i u stabilnoj termodinamičkoj ravnoteži (Vukićević-Karabin i Atanacković 2010). Ovakva zvezda je sferno simetrična, odnosno sve relevantne fizičke veličine mogu biti opisane kao funkcije radijalne koordinate r. Iz pretpostavke da se masa održava dobijamo jednačinu očuvanja mase, koja opisuje gradijent mase kao funkciju raspodele gustine u zvezdi. Iz pretpostavke da je zvezda u hidrostatičkoj ravnoteži, dobijamo jednačinu hidrostatičke ravnoteže, koja opisuje gradijent pritiska kao funkciju raspodele gustine i gravitacionog polja zvezde. Ovde je korisno iskoristiti Birkhofovu teoremu, odnosno činjenicu da je gravitacioni potencijal sferno simetrične raspodele mase jednak gravitacionom potencijalu materijalne tačke čija je masa jednaka ukupnoj masi sferne raspodele. Ova teorema znatno pojednostavljuje problem rešavanja sturkture u slučaju sferno simetrične raspodele mase, što nije slučaj sa sferoidnom raspodelom mase, gde Birkhofova teorema ne važi, a čiju strukturu ćemo u ovom radu proučavati. Tada je nužno koristiti Poasonovu jednačinu koja povezuje gravitacioni potencijal objekta ϕ sa raspodelom gustine ρ u njemu (Chandrasekhar 1933). Iz pretpostavke da se sva energija proizvedena unutar zvezde iz nje izrači, dobija se jednačina održanja energije, koja opisuje gradijent luminoznosti u zvezdi. Na osnovu mehanizma prenosa toplote unutar zvezde, zračenjem, konvekcijom ili kondukcijom, dobija se jednačina koja opisuje gradijent temperature unutar zvezde (Vukićević-Karabin i Atanacković 2010).

Sistem ove četiri diferencijalne jednačine, jednačine strukture stabilne zvezde, zajedno sa Poasonovom jednačinom nije zatvoren i da bi se zatvorio potrebno je još dodati jednačinu stanja, kao i algebarske jednačine za količinu energije koju proizvede jedinična masa u jedinici vremena, kao i parametre koji opsuju hemijski sastav i prenos toplote (*ibid.*). Jednačina stanja je jednačina koja opisuje zavisnost između termodinamičkih veličina koje opisuju objekat i dobija se iz statističke fizike. Za određenu klasu jednačina stanja kod kojih je $P = f(\rho)$, tzv. barotropske jednačine stanja, Poasonova jednačina i jednačina hidrostatičke ravnoteže se dekupluju od ostale dve jednačine stukture. To omogućava da se ove dve jednačine zajedno zapišu kao diferencijalna jednačina drugog reda po gustini, čijim se rešavanjem dobija profil gustine zvezde, a na osnovu jednačine stanja i profil pritiska.

Važno je naglasiti da gustina, pritisak, luminoznost, temperatura i ostale relevantne fizičke veličine nisu samo funkcije koordinata, već i vremena, zbog termonuklearnih reakcija koje se odigravaju u zvezdi. Poznavanje promene ovih veličina sa vremenom omogućava praćenje toka evolucije zvezde. U ovom radu se nećemo baviti evolucijom zvezda.

Interesuje nas struktura rotirajućih zvezda. Pretpostavimo da se zvezda nalazi u hidrostatičkoj ravnoteži i da uniformno rotira ugaonom brzinom Ω. Jednačina hidrostatičke ravnoteže i Poasonova jednačina sa centrifugalnim članom, koji postoji pošto smo prešli u referentni sistem koji rotira zajedno sa zvezdom, su (Eggleton 2006):

$$\nabla P = -\rho \nabla \Phi \tag{1}$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho(r) - 2\Omega^2 \tag{2}$$

U gornjem izrazu je $\Phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) - \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \sin^2\theta$ ukupan potencijal, dok je $\phi(\vec{r})$ gravitacioni, a drugi član u izrazu za $\Phi(\vec{r})$ centrifugalni potencijal. Usled delovanja centrifugalne sile dolazi do odstupanja oblika zvezde od sferne simetrije. Ovako deformisana zvezda ima oblik sferoida, jer jednačina hidrostatičke ravnoteže i Poasonova jednačina održavaju azimutalnu simetriju. Sve relevantne fizičke veličine će biti opisane kao funkcije dve promenljive: radijalne koordinate r i polarnog ugla θ. Ovo znatno komplikuje rešavanje sturkture rotirajućih zvezda, jer je jednačina strukture parcijalna diferencijalna jednačina (Chandrasekhar 1933).

Iz jednačina (1) i (2) sledi da se površi sa konstantnim potencijalom Φ, ekvipotencijalne površi, koje definišu oblik zvezde, poklapaju sa površima konstantnih ρ i P, odnosno izopitkim i izobarnim površima, respektivno (Eggleton 2006). Zbog identičnosti ekvipotencijalnih, izopitkih i izobarnih površi opravdano je posmatrati ρ i P kao funkcije ekvipotencijalih površi Σ_i, gde za svaku ekvipotencijalu površ postoji odgovarajuća vrednost potencijala Φ_i. Na ovaj način smo pojednostavili problem rešavanja strukture sporo-rotirajućih zvezda, jer smo našli način da relevante fizičke veličine posmatramo kao funkcije jednog parametra, umesto dva (r i θ) kako je prethodno ustanovljeno.

Jedan od načina aproksimativnog opisivanja ekvipotencijalne površi Σ_i je pomoću srednjeg radijusa R. Prostor ograničen površi Σ_i ćemo označiti sa v, a zapreminu tog prostora sa $V(\Phi_i)$. Srednji radijus je definisan kao radijus sfere čija je zapremina jednaka $V(\Phi_i)$ (Kippenhahn i Thomas 1969; Arbutina 2009), odnosno:

$$R \equiv \left(\frac{V(\Phi_i)}{4\pi/3} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{3}$$

Sada ćemo sve relevante fizičke veličine neophodne za opis sporo-rotirajućih zvezda posmatrati kao funkcije srednjeg radijusa R, koji je karakterističan za svaku ekvipotencijalnu površ.

Vođeni datim radom (Kippenhahn i Thomas 1969) definišemo srednju vrednost funkcije f na ekvipotencijalnoj površi Σ_i:

$$\langle f \rangle \equiv \frac{1}{S}\int_{\Sigma_i} f \; \mathrm{d}\sigma \tag{4}$$

gde je $\mathrm{d}\sigma$ element površi Σ_i, S površina Σ_i i važi $S = \int_{\Sigma_i} \mathrm{d}\sigma$. Na ovom mestu ćemo aproksimirati površinu površi Σ_i sa površinom sfere čiji je radijus jednak srednjem radijusu R, odnosno $S \approx 4\pi R^2$. Ova aproksimacija je adekvatnija od aproksimacije zapremine prostora ograničenog površi Σ_i, koji je gore označen sa v, sa zapreminom sfere.

Intenzitet gravitacionog ubrzanja $\vec{g}$ je:

$$|\vec{g}| = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}R} \tag{5}$$

Odredimo $\langle g \rangle$, uz dodatno uvođenje aproksimacije $\langle g^{-1} \rangle \approx \langle g \rangle^{-1}$:

$$\langle g^{-1} \rangle = \frac{1}{S}\int_{\Sigma_i} \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\Phi} \; \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{S}\frac{1}{\mathrm{d}\Phi}\int_{\Sigma_i} \mathrm{d}R\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\Phi}$$

$$\Rightarrow \langle g \rangle \approx S\,\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}V} = S\,\frac{\mathrm{d}\Phi}{S\mathrm{d}R} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}R} \tag{6}$$

Na prelasku iz prve u drugu jednakost u prvom redu kod jednačine (6) je $\mathrm{d}\Phi(R)$ izbačeno ispred integrala zbog činjenice da je $\Phi = \mathrm{const}$ na ekvipotencijalnoj površi Σ_i.

Srednju vrednost g na površi Σ_i možemo, takođe, odrediti korišćenjem $\vec{g} = -\nabla\Phi$:

$$\begin{aligned}\langle g \rangle &= \frac{1}{S}\int_{\Sigma_i} -\nabla\Phi \cdot \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{S}\int_{v} -\nabla^2\Phi \cdot \mathrm{d}R\mathrm{d}\sigma = \\ &= \frac{1}{S}\int_{v} (-4\pi G\rho(r) + 2\Omega^2) \; \mathrm{d}V \end{aligned} \tag{7}$$

pri čemu je na prelasku iz prvog u drugi red iskorišćena Gausova teorema (Feynman *et al*. 2013). Na prelasku iz drugog u treći red iskorišćena je Poasonova jednačina (2).

Iz jednačina (6) i (7) sledi:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}R} S \approx 4\pi G M - 2\Omega^2 V$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}R} \approx \frac{GM}{R^2} - \frac{2}{3}\Omega^2 R \tag{8}$$

pri čemu je u drugom redu iskorišćena jednačina hidrostatičke ravnoteže (1) skalarno pomnožena ortom srednjeg radijusa $\hat{R}$.

Jednačina (8) je jednačina hidrostatičke ravnoteže sporo-rotirajuće zvezde i u kombinaciji sa jednačinom održanja mase (obe izražene preko srednjeg radijusa):

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}R} = 4\pi R^2 \rho(R) \tag{9}$$

može se svesti na jednačinu koja ima sledeći oblik:

$$\frac{1}{R^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(\frac{R}{\rho(R)}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R}\right)=-4\pi G\rho(R)+2\Omega^2 \tag{10}$$

Kombinovanjem jednačine (10) sa proizvoljnom barotropskom jednačinom stanja dobija se diferencijalna jednačina drugog reda po gustini. Granice integracije su definisane činjenicom da je gustina zvezde u centru jednaka centralnoj gustini ρ_c i da je gustina na površini zvezde jednaka nuli. Rešavanjem ove jednačine dobija se profil gustine, čijim ponovnim uvrštavanjem u barotropsku jednačinu stanja biva određen profil pritiska. Stanje materije u BP se opisuje barotropskim jednačinama stanja koje su izložene u nastavku teksta.

Ovaj formalizam modelovanja sporo rotirajućih zvezda se zove Kipenhan-Tomasov (Kippenhahn i Thomas 1969).

Čandrasekarova jednačina stanja na $T = 0$ K i politropska jednačina stanja

Beli patuljci su izuzetno gusiti objekti, gustine u opsegu (10^7–10^9) kg/m^3, koji se sastoje od jonizovanih atoma i visokoenergetskih elektrona. Unutrašnjost BP možemo pojednostavljeno posmatrati kao kvantni sistem u obliku jednodimenzione potencijalne jame sa beskonačnim zidovima (Radojević 2009). Energije čestica koje se nalaze u ovoj potencijalnoj jami su kvantovane. Elektron je čestica sa spinom 1/2, odnosno fermion, i podleže Paulijevom principu isključenja. Prema Paulijevom principu isključenja dva fermiona ne mogu istovremeno imati iste vrednosti svih kvantnih brojeva. Pošto spin elektrona ima dva stanja, na svakom energetskom nivou mogu se naći tačno dva fermiona. Na ovaj način elektroni, čak i u odsustvu termalnih ekscitacija, bivaju forsirani da zauzimaju više energetske nivoe, i time generišu degenerisani elektronski pritisak koji se suprotstavlja gravitacionom sažimanju.

Elektroni interaguju sa jonizovanim jezgrima Kulonovom silom, ali pošto je cela sredina električno neutralna i izuzetno gusta dolazi do ekraniranja, te se elektroni mogu aproksimativno smatrati slobodnim. Raspodela srednjeg broja elektrona po energetskim nivoima u ovakom sistemu je opisana Fermi-Dirakovom raspodelom (*ibid.*). Na temperaturi $T = 0$ K raspodela dobija oblik Fermi-Dirakove stepenice, odnosno uniformna je i javlja se energetski nivo, tkz. Fermijev nivo, posle koga nema popunjenih energetskih nivoa. Pomoću metoda kvantne statističke fizike, pretpostavke da se BP nalazi na $T = 0$ K i pretpostavke da se elektroni kreću relativističkim brzinama dobija se relativistička jednačina stanja degenerisanog elektronskog gasa na $T = 0$ K (Radojević 2009; Chandrasekhar 1934):

$$P = Af(x) \tag{11}$$

gde je $x = \dfrac{k\hbar}{mc}$, $A = \dfrac{\pi m^4 c^5}{3h^3}$, i:

$$f(x) = x\sqrt{1+x^2}\,(2x^2-3)+3\,\mathrm{arsh}\,x \tag{12}$$

Veza gustine ρ i x je data jednačinom:

$$\rho = Bx^3 \tag{13}$$

gde je $B = \dfrac{8\pi m^3 c^3 m_b \mu}{3h^3}$. Opravdanost aproksimacije T = 0 K je posledica toga da su karakteristične temperature BP znatno manje od odgovarajućih Fermijevih temperatura, koje govorore o odstupanju Fermi-Dirakove raspodele od uniformne (Landau i Lifshitz 1980).

Uvođenjem smena datih u literaturi (Chandrasekhar 1934):

$$x = (\phi^2 y_0^2 - 1)^{1/2} \tag{14}$$

$$y_0^2 = x_0^2 - 1 \tag{15}$$

$$R = \left(\frac{2A}{\pi G}\right)^{1/2} \frac{1}{By_0}\zeta \tag{16}$$

i korišćenjem jednačine stanja (11), jednačina strukture sporo-rotirajućih zvezda (10) postaje jednačina strukture relativističkih BP:

$$\frac{1}{\zeta^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\left(\zeta^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\zeta}\right) = -\left(\phi^2 - \frac{1}{y_0^2}\right)^{3/2} + v\left(1 - \frac{1}{y_0^2}\right)^{3/2} \tag{17}$$

gde je $v = \dfrac{\Omega^2}{2\pi G\rho_c} = \dfrac{\Omega^2}{2\pi GB}(y_0^2 + 1)^{-3/2}$. U nerotirajućoj granici v = 0 ova jednačina se svodi na jednačinu strukture dobijenu u literaturi (Chandrasekhar 1934; Radojević 2009):

$$\frac{1}{\zeta^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\left(\zeta^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\zeta}\right) = -\left(\phi^2 - \frac{1}{y_0^2}\right)^{3/2} \tag{18}$$

Početni uslovi pri rešavanju jednačine (17) su:

$$\phi(\zeta = 0) = 1,\ \left.\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta=0} = 0 \tag{19}$$

pri čemu se integracija vrši dok se ne zadovolji uslov $\phi(\zeta_*) = 1/y_0$ koji odgovara činjenici da je gustina zvezde na površini jednaka nuli. U gornjim jednačinama $\zeta_* \propto R_*$ prema jednačini (16), gde je R_* srednji radijus zvezde.

U graničnim slučajevima Čandrasekarova jednačina stanja na T = 0 K (11) se svodi na dve klase politropske jednačine stanja:

$$P(R) = K\rho^\gamma(R) \tag{20}$$

gde je K konstanta, γ pozitivan parametar definisan pomoću politropskog indeksa n prema jednačini $\gamma = \dfrac{n+1}{n}$.

Kod manje masivnih BP brzine kretanja elektrona nisu bliske brzini svetlosti. U ovoj nerelativističkoj granici ($x \ll 1$), Čandrasekrova jednačina stanja na T = 0 K (11) se svodi na politropsku jednačinu stanja sa politropskim indeksom n = 1.5 (Chandrasekhar 1934; Kippenhahn *et al.* 2012). U drugom graničnom slučaju, kod izrazito masivnih BP, kada se elektroni kreću ultra-relativističkim brzinama ($x \gg 1$), jednačina stanja se svodi na politropsku jednačina stanja sa n = 3 (*ibid.*). Jednačina strukture sporo-rotirajućih zvezda opisanih politropskom jednačinom stanja je (Arbutina 2009):

$$\frac{1}{\Xi^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Xi}\left(\Xi^2\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\Xi}\right) = -\Theta^n + v \tag{21}$$

gde je $\Theta^n = \dfrac{\rho}{\rho_c}$, $l^2 = \dfrac{K(n+1)}{4\pi G}\rho_c^{\frac{1}{n}-1}$ i $R = l\Xi$. Ova jednačina se može dobiti za slučajeve n = 1.5 i n = 3 politrope odgovarajućom asimptotskom analizom jednačine (17). Jednačina (21) je modifikovana Lejn-Emdenova jednačina, pri čemu „obična" Lejn-Emdenova jednačina odgovara nerotirajućem slučaju $v = 0$:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\xi^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right) = -\theta^n \tag{22}$$

Početni uslovi za rešvanje jednačine (21) su:

$$\Theta(\Xi = 0) = 1,\ \left.\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\Xi}\right|_{\Xi=0} = 0 \tag{23}$$

pri čemu se integracija vrši dok se ne ispuni uslov $\Theta(\Xi_*) = 0$. U prethodnim jednačinama je $\Xi_* = R_* / l$.

Ukupna masa i moment inercije

Rešavanjem jednačina (17) ili (21), u zavisnosti od odabrane jednačine stanja, dobija se profil gustine i pritiska po srednjem radijusu. Na osnovu ovih profila nisu nam poznate zavisnosti ρ i P, kao i ostalih veličina koje zavise od njih, kao funkcija od r i θ. Međutim moguće je odrediti vrednosti globalnih observabli koje nas zanimaju. Imajući u vidu da je $M = \int_v \mathrm{d}V\rho(\vec{r})$ korišćenjem smena datih u (14), (15) i (16) i jednačine strukture (17) dobijamo ukupnu masu objekta:

$$M = 4\pi\left(\frac{2A}{\pi G}\right)^{3/2}\frac{1}{B^2}\zeta_*^2\left\{\frac{v}{3}\left(1-\frac{1}{y_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}\zeta_* - \left.\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta_*}\right\} \tag{24}$$

Slično, polazeći od zapreminskog integrala koji definiše moment inercije $I = \int_v \mathrm{d}m(\vec{r})r^2\sin^2\theta$ njegovim zapisivanjem u koordinatama srednjeg radijusa i korišćenjem smena (14), (15) i (16) dobijamo jednačinu za moment inercije:

$$I = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{2A}{\pi G}\right)^{5/2} \frac{1}{B^4 y_0^5} \int_0^{\zeta_*} (\phi^2 y_0^2 - 1)^{3/2} \zeta^4 \, d\zeta \tag{25}$$

Poznavanjem momenta inercije i ugaone brzine rotacije zvezde Ω, moment impulsa je određen jednačinom:

$$J = I\Omega \tag{26}$$

Jedan od korisnih načina zapisivanja momenta inercije i momenta impulsa zvezde je pomoću bezdimenzionog žiro-radijusa k. Veza I i k je (Arbutina 2009):

$$I = k^2 M R_*^2 \tag{27}$$

Odredimo bezdimenzioni žiro-radijus. Polazeći od jednačine momenta inercije (25) i koristeći jednačinu za masu objekta (24), jednačinu smene srednjeg radijusa (16) i (27), sledi da je kvadrat bezdimenzionog žiro-radijusa za Čandrasekarovu jednačinu stanja na $T = 0$ K dat kao:

$$k^2 = \frac{2}{3} \frac{\int_0^{\zeta_*} \left(\phi^2 - \frac{1}{y_0^2}\right)^{3/2} \zeta^4 \, d\zeta}{\zeta_*^4 \left\{ \frac{v}{3}\left(1 - \frac{1}{y_0^2}\right)^{3/2} \zeta_* - \left.\frac{d\phi}{d\zeta}\right|_{\zeta_*} \right\}} \tag{28}$$

Za politropsku jednačinu stanja, ukupna masa i k^2 se svode na (Arbutina 2009):

$$M = 4\pi l^3 \left\{ -\Xi_* \left.\frac{d\Theta}{d\Xi}\right|_{\Xi = \Xi_*} + v \frac{\Xi_*}{3} \right\} \tag{29}$$

$$k^2 = \frac{2}{3} \frac{\int_0^{\Xi_*} \Xi^4 \Theta^n \, d\Xi}{\zeta_*^4 \left\{ \frac{v}{3} \Xi_* - \left.\frac{d\Theta}{d\Xi}\right|_{\Xi_*} \right\}} \tag{30}$$

pri čemu se u slučajevima $n = 1.5$ i $n = 3$ ovi izrazi mogu dobiti odgovarajućom asimptotskom analizom izraza u jednačinama (24) i (28).

Opis odstupanja belih patuljaka od sferne simetrije

Ekvipotencijalne površi deformisane zvezde, usled rotacije ili plimskog dejstva, odstupaju od sferne simetrije. Ovo odstupanje je moguće opisati funkcijom α, koju možemo posmatrati kao funkciju r ili R za mala odstupanja od sferne simetrije. U opštem slučaju granice ovakvih površi se mogu razviti po Ležandrovim polinomima oko neperturbovanih površi. Za mala odstupanja dovoljno je da se zadržimo na prva dva člana u ovom razvoju (Eggleton 2006):

$$r \approx R\left[1 - \alpha(R) P_2(\cos\theta)\right] \tag{31}$$

$$R \approx r\left[1+\alpha(r)P_2\right] \tag{32}$$

gde je θ polarni gao, $P_2(\cos\theta) \equiv P_2$ Ležandrov polinom $l = 2$ (Griffiths 1999). Jednačinu (32) dobijamo kada jednačinu (31) stepenujemo sa –1 i primenimo aproksimaciju $(1 - x)^{-1} \approx 1 + x$ za $x \ll 1$. Odredimo funkciju α tako da konfiguracija koju opisuju jednačine (31) i (32) odgovara Poasonovoj jednačini (2). Potom nađemo vezu ove funkcije sa Lavovim brojem i kvadrupolnim momentom, observablama koje služe kao opis deformisanosti objekta. Pođimo od sledeće jednakosti:

$$\nabla^2\Phi = \nabla\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}R}\nabla R\right) = \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}R^2}|\nabla R|^2 + \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}R}\nabla^2 R = 4\pi G\rho - 2\Omega^2 \tag{33}$$

pri čemu je na prelasku iz drugog u treći red iskorišćena Poasonova jednačina (2) i $\nabla \equiv \nabla_{\vec{r}}$.

Iz jednačina (31) i (32) sledi:

$$|\nabla \mathrm{R}|^2 \approx 1 + 2\frac{\mathrm{d}(R\alpha)}{\mathrm{d}R}P_2 \tag{34}$$

$$\nabla^2 R \approx \frac{2}{R} + \left\{\frac{1}{R^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(R^2\frac{\mathrm{d}(R\alpha)}{\mathrm{d}R}\right) - \frac{4\alpha}{R}\right\}P_2 \tag{35}$$

Uvrštavanjem jednačina (34) i (35) u (33) dobijamo:

$$\Phi'' + \frac{2}{R}\Phi' + \Phi'\left\{\frac{2\Phi''}{\Phi'}(R\alpha' + \alpha) + \alpha'' + 4\alpha' - \frac{2\alpha}{R}\right\}P_2 = 4\pi G\rho - 2\Omega^2 \tag{36}$$

Pošto je razvoj po Ležandrovim polinomima jedinstveno određen, izraz ispred Ležandrovog polinoma P_2 mora biti jednak nuli, odakle sledi modifikovana Klerova jednačina (Eggleton 2006):

$$R\alpha'' + 4\alpha' + \frac{2\Phi''}{\Phi'}(R\alpha' + \alpha) - \frac{2\alpha}{R} = 0 \tag{37}$$

Uvedimo sledeću smenu:

$$\eta_2(R) = \frac{R}{\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}R} \tag{38}$$

i ubacimo je u jednačinu (37), čime dobijamo modifikovanu Kler-Radau jednačinu (*ibid.*):

$$R\eta_2' + \eta_2(\eta_2 - 1) + 4\eta_2 + \frac{2\Phi''}{\Phi'}(\eta_2 + 1)R - 2 = 0 \tag{39}$$

Uočimo da iz jednačine (36) takođe sledi:

$$\Phi'' + \frac{2}{R}\Phi' = 4\pi G\rho - 2\Omega^2 \tag{40}$$

Iskoristimo jednačinu (40) i jednačinu hidrostatičke ravnoteže (8) da pojednostavimo jednačinu (39):

$$R\eta_2' + \eta_2(\eta_2 - 1) + 2R^3 \frac{4\pi G\rho_c\left(\frac{\rho}{\rho_c} - v\right)}{GM - \frac{2}{3}\Omega^2 R^3}(\eta_2 + 1) - 6 = 0 \tag{41}$$

Dobili smo modifikovanu Kler-Radau jednačinu (41) koja mora biti rešena numerički za različite jednačine stanja. Početni uslov je $\eta(0) = 0$.

Za Čandrasekarovu jednačinu stanja na $T = 0$ K (11), koristeći smene (14), (15), (16), jednačinu gustine (13) i jednačinu strukture (17), jednačina (41) dobija sledeći oblik:

$$\zeta\frac{\mathrm{d}\eta_2}{\mathrm{d}\zeta} + \eta_2(\eta_2 - 1) - \frac{2\zeta}{\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\zeta}}\left\{\left(\phi^2 - \frac{1}{y_0^2}\right)^{3/2} - \left(1 - \frac{1}{y_0^2}\right)^{3/2}\right\}(\eta_2 + 1) - 6 = 0 \tag{42}$$

Za politropsku jednačinu stanja jednačina (41) ima oblik (Arbutina 2009):

$$\Xi\frac{\mathrm{d}\eta_2}{\mathrm{d}\Xi} + \eta_2(\eta_2 - 1) - \frac{2\Xi}{\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\Xi}}\left\{\Theta^n - v\right\}(\eta_2 + 1) - 6 = 0 \tag{43}$$

pri čemu se u slučajevima politropa sa n = 1.5 i n = 3 ova jednačina može dobiti odgovarajućom asimptotskom analizom jednačine (42).

Zbog izbegavanja singularnosti Kler-Radau jednačine uvedena je, pri numeričkom rešavanju, smena koordinata $x = \ln\zeta$, odnosno $x = \ln\Xi$.

Rešenje jednačina (42) i (43) je funkcija $\eta_2(R)$ čijim poznavnajem se može odrediti funkcija $\alpha(R)$, rešavanjem diferencijalne jednačine (38) sa proizvoljnim (Arbutina 2009) početnim uslovom $\alpha(0) = \alpha_0$:

$$\alpha(R) = \alpha(0)\exp\left(\int_0^R \frac{\eta_2(R)}{R}\,\mathrm{d}R\right) \tag{44}$$

Da bismo odredili vrednosti kvadrupolnog momenta (dalje u tekstu), potrebno nam je poznavanje vrednosti gornjeg izraza na površini zvezde. Proizvoljnost početnog uslova $\alpha(0)$ je posledica invarijatnosti Klerove jednačine na reskaliranje, što nam govori da ona ne daje kompletan opis odstupanja rotirajuće zvezde od sferne simetrije. Ova činjenica stvara problem pri direktnom pokušaju određivanja vrednosti kvadrupolnog momenta, koji ne može biti nezavisan od vrednosti $\alpha(0)$. Kao što ćemo pokazati, taj problem se može izbeći.

Rotacioni Lavov broj

Rotacioni Lavov broj opisuje deformabilnost zvezde usled rotacije. Uvodi se apsidalna konstanta k_2 čija je veza sa Lavovim brojem λ data sledećim jednačinama (Poisson i Will 2014; Yagi i Yunes 2013):

$$k_2 = \frac{3-\eta_2(R_*)}{4+2\eta_2(R_*)} \tag{45}$$

$$\lambda = \frac{2}{3} k_2 R_*^5 \tag{46}$$

gde je R_* srednji radijus zvezde i $\eta_2(R_*)$ vrednost funkcije η_2 na površini zvezde, koja se dobija rešavanjem jednačine (42), odnosno (43).

Kvadrupolni moment

Gravitacioni potencijal izvan distribucije mase $\rho(\vec{r})$ je dat sledećim zapreminskim integralom (Poisson i Will 2014):

$$\phi(\vec{r}) = -G\int_v \frac{\mathrm{d}^3\vec{r}\,'\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{47}$$

Multipolni razvoj gravitacionog potencijala (tj. razvoj po Ležandrovim polinomima), u koordinatnom sistemu čiji se početak poklapa sa centrom mase objekta, je:

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{GM}{R^2} P_0(\cos\theta) - G\frac{QP_2(\cos\theta)}{r^3} + \cdots \tag{48}$$

gde je u slučaju sferoidne raspodele mase kvadrupolni moment Q dat sledećim zapreminskim integralom (*ibid.*):

$$Q = \frac{1}{2}\int_v \vec{r}\,'\rho(\vec{r}\,')\left(3(x_3')^2 - \vec{r}\,'^2\right) \tag{49}$$

Izbor koordinatnog sistema povlači da dipolni član gravitacionog potencijala nestaje, pa je on u kvadrupolnoj aproksimaciji dat zbirom monopolnog i kvadrupolnog člana.

Zapisaćemo integral iz jednačine (49) pomoću funkcije α. Za početak, raspišimo integral u sfernim koordinatama:

$$Q = 2\pi\int_0^{\pi}\int_0^{r(\theta)} \rho(\vec{r}\,')\vec{r}\,'^4 P_2(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta \tag{50}$$

Napravimo transformaciju radijalne koordinate r u srednji radijus R, koristeći jednačinu (31):

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi\int_0^{R*}\int_0^{\pi}\rho(R)R^4(1-4\alpha(R)P_2)P_2\sin\theta\mathrm{d}\theta\left(1-\frac{\mathrm{d}(R\alpha(R))}{\mathrm{d}R}P_2\right)\mathrm{d}R = \\ &= \frac{4\pi}{5}\int_0^{R_*}\rho(R)R^4\left(5\alpha + R\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}R}\right)\mathrm{d}R = \\ &= -\frac{1}{5}\int_0^{M}\left(5\alpha + R\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}R}\right)R^2\,\mathrm{d}M \end{aligned} \tag{51}$$

gde je R_* srednji radijus zvezde i M ukupna masa zvezde. Na prelasku iz drugog u treći red iskorišćena je jednačina očuvanja mase (9). Na osnovu strukture izraza vidimo potrebu za poznavanjem prave vrednosti $\alpha(0)$.

Sada ćemo pokazati kako se poznavanje $\alpha(0)$ može izbeći pri određivanju kvadrupolnog momenta. Ukupan potencijal rotirajuće zvezde je u kvadrupolnoj aproksimaciji jednak:

$$\Phi(\vec{r}\,') \approx -\frac{GM}{r} - \frac{1}{3}\Omega^2 r^2 - \left(\alpha(r)\frac{GM}{r} + \frac{GQ}{r^3} - \frac{1}{3}\Omega^2 r^2\right)P_2 \tag{52}$$

Pošto je površ zvezde ekvipotencijalna, odnosno potencijal na toj površi ne zavisi od polarnog ugla θ, izraz ispred $l = 2$ Ležandrovog polinoma u jednačini (52), evaluiranoj na površini zvezde, mora biti jednak nuli, pa sledi:

$$\alpha(R_*) = R_*^3\left(\frac{\Omega^2}{3GM} - \frac{Q}{MR_*^5}\right) \tag{53}$$

Koristeći jednačine (51) i (53) i uvodeći veličinu $\tilde{Q}$, dobijamo (Eggleton 2006):

$$\tilde{Q} = \frac{1}{5}\frac{\int_0^M R^2\,\mathrm{d}M(5\alpha + R\alpha')}{MR_*^2\,\alpha(R_*)} \tag{54}$$

$$Q = -\frac{\Omega^2 R_*^5}{3G}\frac{\tilde{Q}}{1-\tilde{Q}} \tag{55}$$

U slučaju BP opisanih Čandrasekarovom jednačinom stanja na $T = 0$ K veličina $\tilde{Q}$ je po uvođenju, kao i ranije, odgovarajućih smena data jednačinom:

$$\tilde{Q} = \frac{1}{5}\frac{\int_0^{\zeta_*}(5\alpha + \zeta\alpha')\left(\phi^2 - \frac{1}{y_0^2}\right)^{3/2}\zeta^4\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta_*^4\left\{\frac{v}{3}\left(1 - \frac{1}{y_0^2}\right)^{3/2}\zeta_* - \left.\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\zeta_*}\right\}\alpha(\zeta_*)} \tag{56}$$

Analogno, kod BP opisanih politropskom jednačinom stanja ova veličina je određena jednačinom (Arbutina 2009):

$$\tilde{Q} = \frac{1}{5}\frac{\int_0^{\Xi_*}(5\alpha + \Xi\alpha')\Xi^4\,\Theta^n\,\mathrm{d}\Xi}{\zeta_*^4\left\{\frac{v}{3}\Xi_* - \left.\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\Xi}\right|_{\Xi_*}\right\}\alpha(\Xi_*)} \tag{57}$$

pri čemu se ovaj izraz u slučaju politropa $n = 1.5$ i $n = 3$ može dobiti odgovarajućom asimptotskom analizom jednačine (56). U jednačinama (56) i (57) se vidi rešenje problema proizvoljnog izbora vrednosti $\alpha(0)$ jer se ono u brojiocu i imeniocu razlomaka kod ovih jednačina „pokrati" na osnovu izraza (44).

I-Love-Q relacije kod belih patuljaka

I-Love-Q relacije su relacije između momenta inercije I , Lavovog broja λ i kvadrupolnog momenta Q. Vođeni radom Jagija i Junsa (Yagi i Yunes 2013), normalizovaćemo ove veličine sa kompaktnošću C, pri čemu ćemo normalizovane veličine označavati sa $\bar{I}$, $\bar{\lambda}$ i $\bar{Q}$. Pošto je u radu (*ibid.*) korišćena opšta teorija relativnosti, radi jednostavnosti sve veličine su izražene u geometrijskim jedinicama koje su definisane sa $G = c = 1$. Imajući u vidu to da ovde radimo u okvirima Njutnovske mehanike, redefinisaćemo izraz za kompaktnost koji se korsiti u pomenutom radu. Najkompaktniji objekti u prirodi su crne rupe, te ćemo stoga definisati da je njihova kompaktnost jednaka jedinici. Svi ostali objekti imaju kompaktnost manju od jedinice, a u graničnom slučaju nekompaktni objekti imaju vrednost kompaktnosti nula. Jedine dve veličine koje utiču na kompaktnost objekta su masa i radijus. Ako bismo uzeli da je $C \propto M/R_*$, nasuprot R_*/M, dobili bismo da nekompaktan objekat ima beskonačan radijus i konačnu masu, što ima fizičkog smisla. Koeficijent proporcionalnosti dobijamo kada ubacimo uslov da je kompaktnost crnih rupa jednaka jedinici, odnosno $k = R_{\mathrm{BH}}/M$, gde je $C = kM/R_*$, $R_{BH} = \dfrac{2GM}{c^2}$ Švarcšildov radijus. Na osnovu ovoga dobijamo kompaktnost definisanu u sistemu jedinica koji više odgovara Njutnovoj mehanici:

$$C = R_{BH} / R_* \tag{58}$$

Ako normalizujemo moment inercije, Lavov broj i kvadrupolni moment sa kompaktnošću definisanom prema (58), dobijamo:

$$\bar{I} = \frac{I}{MR_{BH}^2} = k^2 C^{-2} \tag{59}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{R_{BH}^5} = \frac{2}{3} k_2 C^{-5} \tag{60}$$

$$\bar{Q} = -\overline{\left(\frac{Q}{J^2}\right)} = \frac{\tilde{Q}}{3(k_1^2)^2(1-\tilde{Q})} C^{-1} \tag{61}$$

U jednačini (61) se pri normalizaciji kvadrupolnog momenta uzima njegov količnik sa momenta impulsa J objekta normalizovan sa kompaktnošću. U literaturi (Laarakkers i Poisson 1998) je pokazano da postoji skaliranje između kvadrupolnog momenta i momenta impulsa objekta za različite klase kompaktnih objekata, što motiviše ovakvu normalizaciju.

S obzirom da se $\bar{I}$, $\bar{\lambda}$ i $\bar{Q}$ skaliraju sa kompaktnošću objekta C, možemo izraziti njihove međusobne relacije:

$$\bar{I} = C_{\bar{I}\bar{\lambda}} \bar{\lambda}^{2/5} \tag{62}$$

$$\bar{I} = C_{\bar{I}\bar{Q}} \bar{Q}^{2} \tag{63}$$

$$\overline{Q} = C_{\overline{Q}\overline{\lambda}} \overline{\lambda}^{1/5} \tag{64}$$

Koeficijenti $C_{\overline{I}\overline{\lambda}}$, $C_{\overline{I}\overline{Q}}$, $C_{\overline{Q}\overline{\lambda}}$ na osnovu (59, 50, 61) zavise od k, k_2 i $\tilde{Q}$:

$$C_{\overline{I}\overline{Q}} = 9(k^2)^5\left(\frac{1-\tilde{Q}}{\tilde{Q}}\right)^2 \tag{65}$$

$$C_{\overline{I}\overline{\lambda}} = \frac{k^2}{\left(\frac{2}{3}k_2\right)^{2/5}} \tag{66}$$

$$C_{\overline{Q}\overline{\lambda}} = \frac{Q}{3(k^2)^2(1-\tilde{Q})}\left(\frac{2}{3}k_2\right)^{-1/5} \tag{67}$$

Ove veličine, u opštem slučaju, zavise od centralne gustine i ugaone brzine objekta, kao što se može videti iz njihovih definicionih izraza. U slučaju nerotirajućih politropa, međutim, njihove vrednosti zavise samo od politropskog indeksa n.

Analitički dobijene relacije

I-Love-Q relacije se mogu izračunati analitički za politrope sa politropskim indeksima $n = 0$ i $n = 1$, što je urađeno u radu Jagija i Junsa (Yagi i Yunes 2013). Ovde je postupno reprodukovano izvođenje za slučaj $n = 0$ politrope.

Izračunajmo I-Love-Q relacije za politropu sa politropskim indeksom $n = 0$, koja opisuje strukutru homogenog sferoida. Raspodela mase je aproksimativno data jednačinom:

$$\rho(r) = \rho_c \tag{68}$$

gde je $r \le R_*$ radijalna koordinata zvezde.

Usled rotacije zvezda se deformiše tako da zadržava azimutalnu simetriju, odnosno zvezda ima oblik sferoida čija je ekscentričnost data jednačinom:

$$e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} \tag{69}$$

gde je b polarni radijus, a a ekvatorijalni radijus zvezde.

Moment inercije homogenog sferoida je:

$$I^{(n=0)} = \frac{2}{5}Ma^2 \tag{70}$$

gde je $M = \frac{4\pi\rho_c}{3}a^2 b$ ukupana masa zvezde. Prema jednačini (59) normalizovani moment inercije je:

$$\overline{I}^{(n=0)} = \frac{2}{5}C^{-2} \tag{71}$$

Kvadrupolni moment homogenog sferoida se može odredti analitički, rešavanjem zapreminskog integrala (49):

$$Q^{(n=0)} = \frac{M}{5}(b^2 - a^2) \tag{72}$$

Prema jednačini (61) u normalizaciji kvadrupolnog momenta pojavljuje se moment impulsa zvezde. Da bismo izračunali moment impulsa $J^{(n=0)} = I^{(n=0)}\Omega$ zvezde, neophodno je da izračunamo ugaonu brzinu rotacije Ω zvezde. Posmatrajmo ekvipotencijalnu površ čiji je potencijal opisan jednačinom (52). Pošto tačka na polu i tačka na ekvatoru leže na istoj površi, sledi da imaju isti potencijal. Odredimo vrednost potencijala na polu i na ekvatoru, odnosno $\Phi(\vec{r}_p)$ i $\Phi(\vec{r}_e)$:

$$\Phi(\vec{r}_p) = -\frac{GM}{b} - \frac{GQ^{(n=0)}}{2b^3} \tag{73}$$

$$\Phi(\vec{r}_e) = -\frac{GM}{a} - \frac{GQ^{(n=0)}}{8a^3} - \frac{1}{2}\Omega^2 a^2 \tag{74}$$

čijim izjednačavanjem dobijamo:

$$\Omega^2 = \frac{8\pi G\rho_c}{15}\left\{5 - \sqrt{1-e^2}\left(\frac{e^2}{2} + 5\right) - \frac{e^2}{1-e^2}\right\} \tag{75}$$

Razvijanjem (75) u Meklorenov red po ekscentričnosti (e), što je opravdano u sporo-rotirajućoj aproksimaciji, dobijamo ugaonu brzinu rotacije zvezde:

$$\Omega = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_c}{15}}\, e \tag{76}$$

odakle možemo odrediti moment impulsa:

$$J^{(n=0)} = \left(\frac{2M}{5}\right)^{3/2}\sqrt{Gae} \tag{77}$$

i normalizovati kvadrupolni moment prema (61):

$$\overline{Q}^{(n=0)} = \frac{GM^2}{R_{BH}}\left(\frac{25}{8}\frac{a}{GM^2}\right) = \frac{25}{8}C^{-1} \tag{78}$$

Normalizovanu vrednost Lavovog broja za homogeni sferoid ćemo izračunati pomoću opšte jednačine koja daje vezu između normalizovanih veličina momenta inercije, Lavovog broja i kvadrupolnog momenta (Yagi i Yunes 2013):

$$\overline{\lambda} = \overline{I}^2\,\overline{Q} \tag{79}$$

pa sledi:

$$\overline{\lambda}^{(n=0)} = \frac{1}{2}C^{-5} \tag{80}$$

Iz jednačina (71), (78) i (80) slede I-Love-Q relacije za politropu $n = 0$:

$$\bar{I}^{(n=0)} = C_{\bar{I}\bar{\lambda}}^{(n=0)} [\bar{\lambda}^{(n=0)}]^{2/5}, C_{\bar{I}\bar{\lambda}}^{(n=0)} \approx 0.528 \tag{81}$$

$$\bar{I}^{(n=0)} = C_{\bar{I}\bar{Q}}^{(n=0)} [\bar{Q}^{(n=0)}]^{2}, C_{\bar{I}\bar{Q}}^{(n=0)} \approx 0.0410 \tag{82}$$

$$\bar{Q}^{(n=0)} = C_{\bar{Q}\bar{\lambda}}^{(n=0)} [\bar{\lambda}^{(n=0)}]^{1/5}, C_{\bar{Q}\bar{\lambda}}^{(n=0)} \approx 3.59 \tag{83}$$

U literaturi (Yagi i Yunes 2013) je pokazano da I-Love-Q relacije za sferoid čija je jednačina stanja politropa sa $n = 1$ odstupaju od relacija (81), (82) i (83) za manje od 0.3%.

Numerički dobijene relacija

I-Love-Q relacije za politropu sa politropskim indeksima $n = 1.5$ i $n = 3$ i Čandrasekarovu jednačinu stanja na $T = 0$ K su izračunate numerički. Numerički je rešen sistem spregnutih diferencijalnih jednačina koji čine:

[i] jednačina strukture politropa (21), odnosno jednačina strukture relativističkih BP (17);

[ii] modifikovana Kler-Radau jednačina za politrope (43), odnosno za relativističke BP (42) i

[iii] jednačina smene (38).

Za rešavanje jednačine strukture korišćen je Ojlerov metod integracije. Kler-Radau jednačina je rešena Runge-Kutta integratorom četvrtog stepena. Dok je jednačina smene (38) zapisana u integralnom obliku (44), a dobijeni integral računat Simpsonovom integracionom formulom. Istom metodom su računati i integrali u jednačinama (56) i (57).

Rezultati su fitovani polinomijalnom krivom oblika:

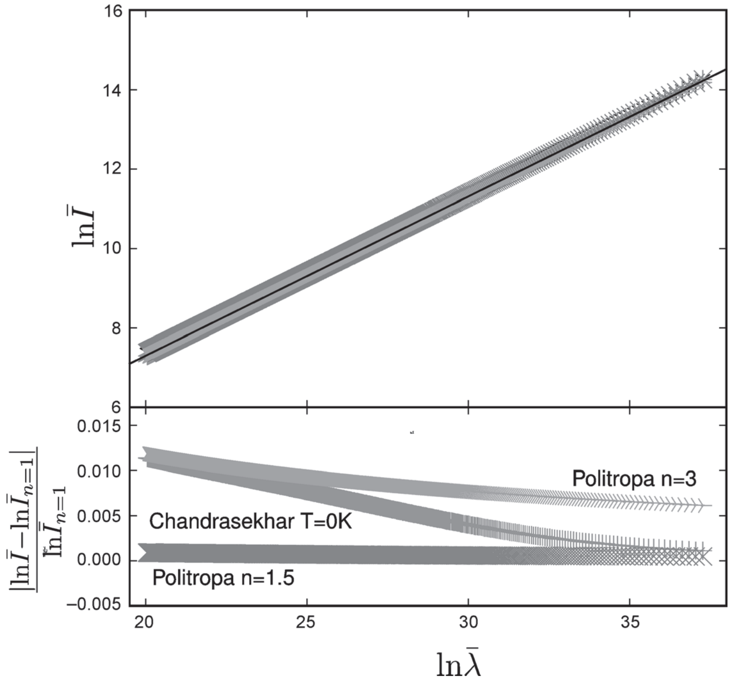
$$\ln Y = a + b \ln X + c(\ln X)^2 + d(\ln X)^3 + e(\ln X)^5 \tag{84}$$

U nerotirajućem slučaju izračunate su I-Love-Q relacije za ove tri jednačine stanja (slike 1, 2 i 3). Koeficijenti u jednačini (84) za ove rezultate su dati u tabeli 1.

Tabela 1. Koeficijenti fitovanja I-Love-Q relacija u nerotirajućem slučaju za politrope $n = 1.5$, $n = 3$ i Čandrasekarovu jednačinu stanja na $T = 0$ K.

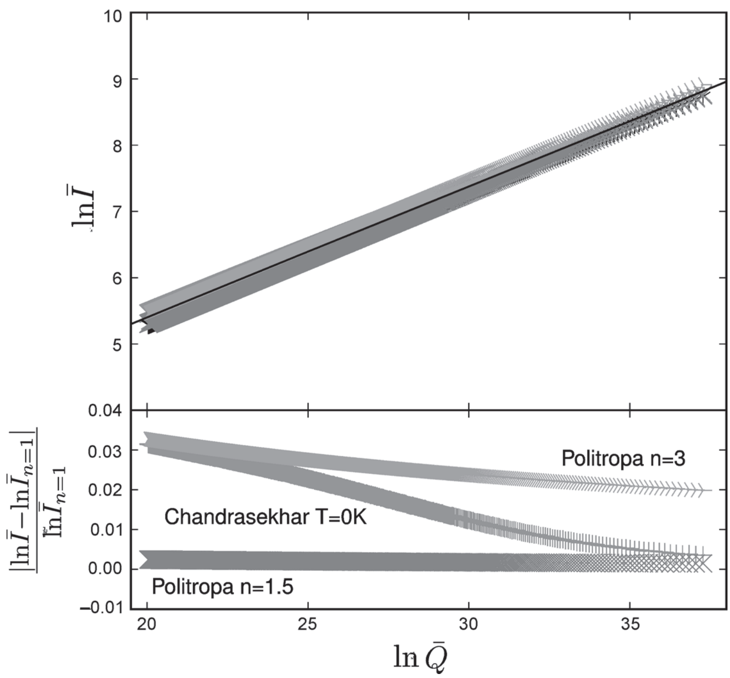
Y	X	a	b	c	d	e
$\bar{I}$	$\bar{\lambda}$	-0.739	0.41	-8.66×10^{-4}	2.94×10^{-5}	-3.30×10^{-7}
$\bar{I}$	$\bar{Q}$	-4.867	3.04	-0.2865	3.36×10^{-2}	-1.399×10^{-3}
$\bar{Q}$	$\bar{\lambda}$	1.475	0.18	1.7×10^{-3}	-5.824×10^{-5}	6.544×10^{-7}

U rotirajućem slučaju za opseg ugaonih brzina [0.001, 0.05] rad/s i centralnih gustina variranih pomoću parametra y_0 iz opsega [1.02, 10], pri čemu je $\rho_c = B(y_0^2 + 1)^{3/2}$ (Radojević 2009), izračunate su I-Love-Q relacije samo za Čandrasekarovu jednaču stanja na $T = 0$ K. Relacije su date na slikama 4, 5 i 6. Kroz rezultate je fitovana polinomijalna kriva (84). Koeficijenti fita su dati u tabeli 2.



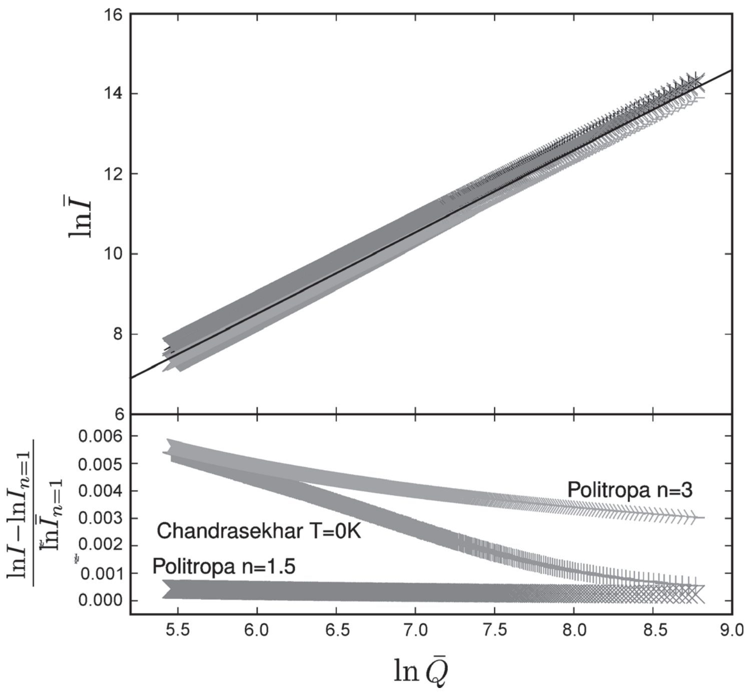
Slika 1. I-Love relacija u nerotirajućem slučaju za politrope n = 1.5, n = 3 i Čandrasekarovu jednačinu stanja na T = 0 K. Gore: moment inercije u funkciji Lavovog broja; crna linija predstavlja fit kroz dobijene rezultate. Dole: relativno odstupanje vrednosti dobijenih za moment inercije u odnosu na analitički dobijene vrednosti za nerotirajuću politropu n = 1 (n = 0).

Figure 1. I-Love relations for non-rotating polytropes with n = 1.5, n = 3 polytropic indexes and Chandrasekhar equation of state for T = 0 K. Above: values for moment of inertia as a function of Love number. Black line is fitting curve. Below: relative deviation between moment of inertia for equations of state mentioned above and the analytically calculated one for n = 1 (n = 0).



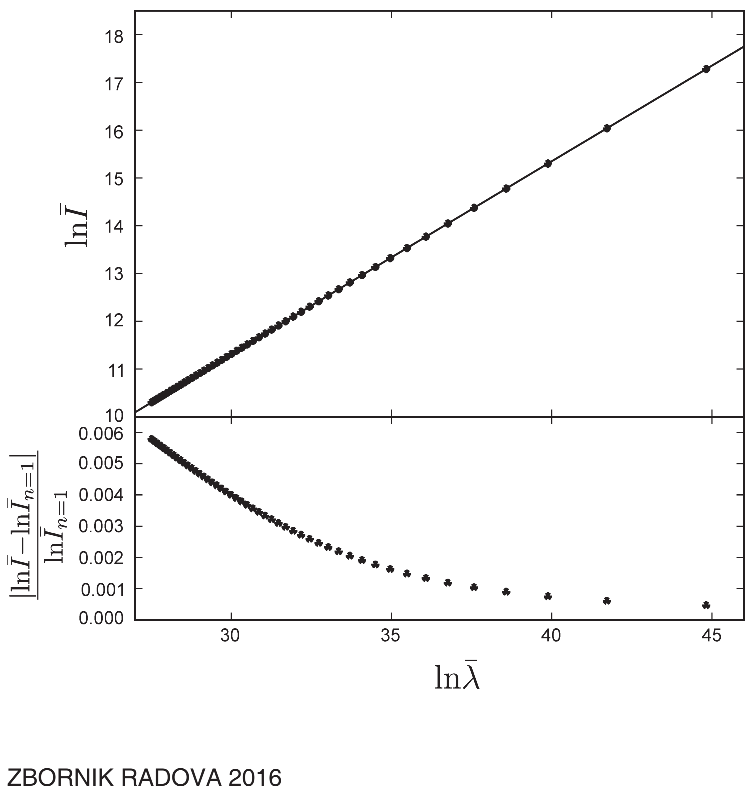
Slika 2. Q-Love relacija u nerotirajućem slučaju za politrope n = 1.5, n = 3 i Čandrasekarovu jednačinu stanja. Gore: vrednosti kvadrupolnog momenta u funkciji od Lavovog broja; crna linija – fit kroz dobijene rezultate. Dole: relativno odstupanje vrednosti dobijenih za kvadrupolni moment od analitički dobijenih rezultata za nerotirajuću politropu n = 1 (n = 0).

Figure 2. Q-Love relations for non-rotating polytropes with n = 1.5, n = 3 polytropic indexes and Chandrasekhar equation of state for T = 0 K. Above: values for quadrupole moment as a function of Love number. Black line is fitting curve. Below: relative deviation between quadrupole momentum for mentioned equations of state and analytically calculated one for n = 1 (n = 0) non-rotating polytrope.



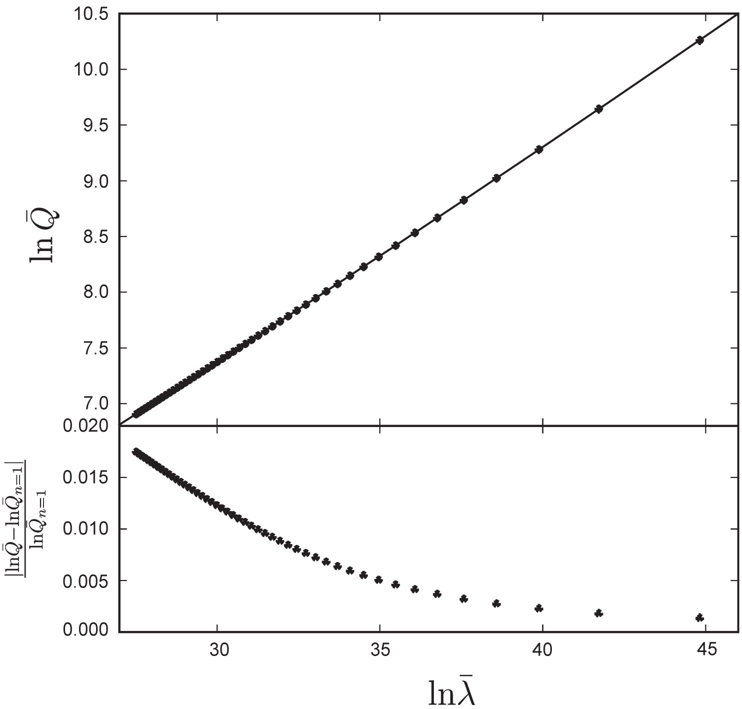
Slika 3. I-Q relacija u nerotirajućem slučaju za politrope $n = 1.5$, $n = 3$ i Čandrasekarovu jednačinu stanja. Gore: vrednosti momenta inercije u funkciji od Lavovog broja; crna linija – fit kroz dobijene rezultate. Dole: relativno odstupanje vrednosti dobijenih za moment inercije od analitički dobijenih rezultata za nerotirajuću politropu $n = 1$ ($n = 0$).

Figure 3. I-Q relations for non-rotating polytropes with $n = 1.5$, $n = 3$ polytropic indexes and Chandrasekhar equation of state for $T = 0$ K. Above: values for moment of inertia as a function of Love number. Black line is fitting curve. Below: relative deviation between momentum of inertia for mentioned equations of state and analytically calculated one for $n = 1$ ($n = 0$) non-rotating polytrope.



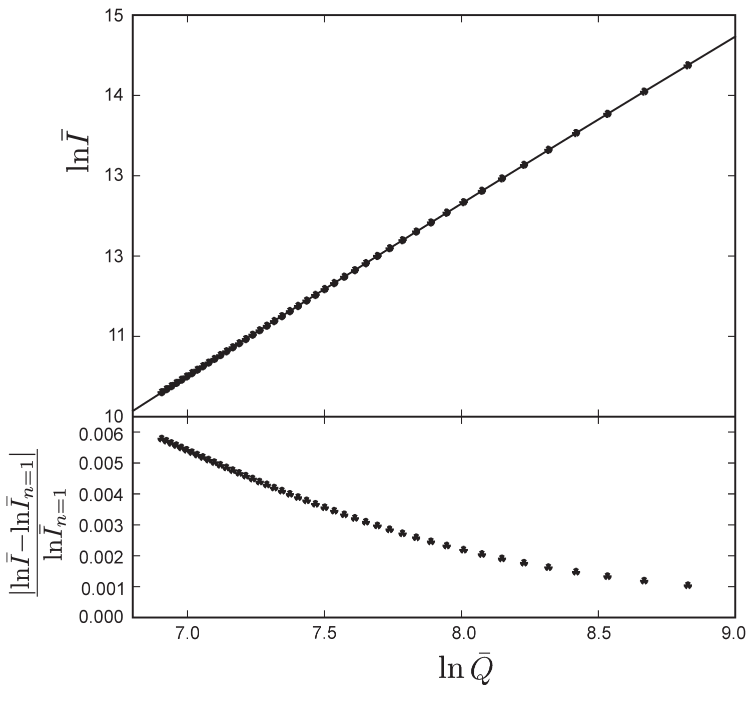
Slika 4. I-Love relacija sa rotacijom u opsegu [0.001, 0.1] rad/s za Čandrasekarovu jednačinu stanja. Gore: vrednosti momenta inercije naspram Lavovog broja; Puna linija reprezentuje krivu fitovanu kroz podatake. Dole: relativno odstupanje ovih podataka od analitičkih dobijenih za nerotirajuću politropu $n = 1$ ($n = 0$).

Figure 4. I-Love relations for Chandrasekhar equation of state for $T = 0$ K with rotation in range [0.001, 0.1] rad/s. Above: values for moment of inertia as a function of Love number. Solid line is fitting curve. Below: relative deviation between moment of inertia for mentioned equation of state and analytically calculated one for $n = 1$ ($n = = 0$) non-rotating polytrope.



Slika 5. Q-Love relacija sa rotacijom u opsegu [0.001, 0.1] rad/s za Čandrasekarovu jednačinu stanja. Gore: vrednosti kvadrupolnog momenta naspram Lavovog broja; Puna linija reprezentuje krivu fitovanu kroz podatake. Dole: relativno odstupanje ovih podataka od analitičkih dobijenih za nerotirajuću politropu $n = 1$ ($n = 0$).

Figure 5. Q-Love relations for Chandrasekhar equation of state for $T = 0$ K with rotation in range [0.001, 0.1] rad/s. Above: values for quadrupole moment as a function of Love number. Solid line is fitting curve. Below: relative deviation between moment of inertia for mentioned equation of state and analytically calculated one for $n = 1$ ($n = 0$) non-rotating polytrope.



Slika 6. I-Q relacija sa rotacijom u opsegu [0.001, 0.1] rad/s za Čandrasekarovu jednačinu stanja. Gore: vrednosti momenta inercije naspram Lavovog broja; Puna linija reprezentuje krivu fitovanu kroz podatake. Dole: relativno odstupanje ovih podataka od analitičkih dobijenih za nerotirajuću politropu $n = 1$ ($n = 0$).

Figure 6. I-Q relations for Chandrasekhar equation of state for $T = 0$ K with rotation in range [0.001, 0.1] rad/s. Above: values for moment of inertia as a function of Love number. Solid line is fitting curve. Below: relative deviation between moment of inertia for mentioned equation of state and analytically calculated one for $n = 1$ ($n= =0$) non-rotating polytrope.

Tabela 2. Koeficijenti fitovanja I-Love-Q relacija sa i bez rotacije za Čandrasekarovu jednačinu stanja na $T = 0$ K.

Y	X	a	b	c	d	e
$\bar{I}$	$\bar{\lambda}$	-0.723	0.379	1.53×10^{-3}	-3.4×10^{-5}	2.44×10^{-7}
$\bar{I}$	$\bar{Q}$	-3.33	1.131	0.2485	-2.33×10^{-2}	7.22×10^{-4}
$\bar{Q}$	$\bar{\lambda}$	1.42	0.244	-3.133×10^{-3}	6.878×10^{-5}	-4.91×10^{-7}

Diskusija

U radu Jagija i Junsa (Yagi i Yunes 2013) dobijene I-Love-Q relacije za različite jednačine stanja su upoređene sa politropom $n = 1$. Posmatranjem relativnog odstupanja dobijenih I-Love-Q relacija bez rotacije za politrope $n = 1.5$, $n = 3$ i Čandrasekarovu jednačinu stanja na $T = 0$ K od $n = 1$ koje je grafički prikazano na donjem grafiku na slikama 1, 2 i 3 zaključujemo da su dobijene relacije aproksimativno univerzalne sa odstupanjima 6% kod I-Q, 1.5% kod I-Love relacija i 4% kod Q-Love relacije. Takođe, posmatrajući grafike na slikama 4, 5 i 6 zaključujemo da rotacija u posmatranom opsegu ugaonih brzina [0.001, 0.1] rad/s očuvava aproksimativnu univerzalnost relacija kod Čandrasekarove jednačine stanja, jer je relativno odstupanje od univerzalnosti manje od 6% za I-Q i I-Love relacije, odnosno manje od 2% za Q-Love relacije u odnosu na nerotirajuće $n = 1$ politrope.

Pri kraju rada na ovom projektu objavljen je rad (Boshkayev *et al.* 2016*b*) u kome su izračunate I-Love-Q relacije kod BP u rotirajućem i nerotirajućem slučaju za Čandrasekarovu jednačinu stanja na $T = 0$ i Salpeterovu jednačunu stanja (Salpeter 1961). Kod Salpeterove jednačine stanja takođe je variran hemijski sastav BP, čime je efektivno menjana jednačina stanja. Stuktura sporo-rotirajućih BP je računata na osnovu Hartlijevog formalizma razvijenog u Njutnovskom limesu (Boshkayev *et al.* 2016b; Boshkayev *et al.* 2016*c*). Uzimajući u obzir da u radu Boškajeva i saradnika (Boshkayev *et al.* 2016*b*) nisu dati koeficijenti krive koja je fitovana kroz dobijene I-Love-Q relacije izložene na graficima 18, 19 i 20 izloženim u datom radu, nije moguće dati valjanu kvantitativnu analizu rezultata koji su tamo dobijeni i onih dobijenih u ovom radu. Međutim, kvalitativnim poredenjem grafika na slikama 1, 2 i 3 sa graficima 18, 19 i 20 (*ibid.*) može se zaključiti da su I-Love-Q relacije dobijene u tom radu približno identične onima koje su u ovom radu predstavljene. Na grafiku 21 u datom radu (Boshkayev *et al.* 2016*b*) javlja se jasno razdvajanje kriva koje reprezentuju rotirajuće i nerotirajuće slučajeve za jednačine stanja koje se koriste u pomenutom radu. Za brzo rotirajuće neutronske zvezde je pokazano (Doneva *et al.* 2014) da se univerzalnost I-Love-Q relacija narušava. Imajući ovo u vidu i činjenicu da je u ovom radu pokazano da za rotacije ≤ 0.1 rad/s univerzalnost ostaje očuvana, neophodno je dodatno istražiti šta se dešava sa univerzalnošću relacija za ugaone brzine > 0.1 rad/s sa kojima je rađeno u ranijim istraživanjima (Boshkayev *et al*. 2016*b*).

Istraživanje razloga zbog kojih se univerzalnost I-Love-Q relacija javlja u neutronskim zvezdama je izloženo u literaturi (Yagi *et al*. 2014; Yagi i Yunes 2016). Jedan od kriterijuma za postojanje univerzalnosti koji je predstavljen u (*ibid.*) zahteva da se ekscentričnost ekvipotencijalnih površina unutar zvezde ne menja značajno unutar regiona koji je bitan za univerzalnost. Ovaj region predstavlja deo unutrašnjosti zvezde koji daje najveći doprinos globalnom momentu inercije i kvadrupolnom momentu. U literaturi (*ibid.*) je uočeno da ovaj kriterijum ide u prilog ideji o aproksimativnoj emergentnoj simetriji koja se javlja kod kompaktnih objekata. Razlog zašto se ova aproksimativna simetrija naziva emergentnom je zbog toga što se univerzalnost I-Love-Q relacija ne manifestuje u stabilnim zvezdama. Ispostavlja se da kada se prethodni kriterijumi postojanja univerzalnosti primene na stabilne zvezde, ekstricinteti njihovih ekvipotencijalnih površina unutar bitnog regiona odstupaju 300-600%, dok kod neutronskih zvezda ova odstupanja nisu veća od 20% (*ibid.*). Potrebno je ispitati kako se poreklo univerzalnosti I-Love-Q relacija kod BP uklapa u razumevanje porekla univerzalnosti razvijenog u pomenutim radovima.

Zaključak

U radu Jagija i Junsa (Yagi i Yunes 2013) su izračunate I-Love-Q relacije kod neutronskih zvezda, za koje je ustanovljeno da su aproksimativno univerzalne. Na osnovu rezultata prethodnih istraživanja (Boshkayev *et al*. 2016*b*) i ovog rada možemo zaključiti da isto važi i za bele patuljke. Imajući u vidu da je u prethodnom istraživanju (Boshkayev *et al*. 2016*b*) ispitana univerzalnost sa Čandrasekarovom jednačinom stanja na $T = 0$ K i Salpeterovom jednačinom stanja, potrebno je još u obzir uzeti Čandrasekarovu jednačinu stanja na $T = 0$ K (Boshkayev *et al*. 2016*a*) i relativističku Feynman-Metropolis-Teller jednačinu stanja na $T = 0$ K (Carvalho *et al*. 2014).

U literaturi (Yagi *et al*. 2014; Yagi i Yunes 2016) su ispitivani različiti kriterijumi postojanja univerzalnosti I-Love-Q relacija kod neutronskih zvezda. Neophodno je iste ove kriterijume primeniti i na bele patuljke, kako bi se ustanovilo da li su kriterijumi koji uslovljavaju postojanje univerzalnosti relacija zajedničko svojstvo svih kompaktnih zvezdanih objekata.

Zahvalnost. Autor se zahvaljuje Jovanu Božuti i Teodori Čapko na korisnim diskusijama vezanim za teorijske aspekte projekta, kao i Miši Jovanoviću i Petru Sauliću na sugestijama u izradi i optimizaciji koda. Posebnu zahvalnost autor duguje Mateji Boškoviću na ideji za projekat, literaturi, korisnim diskusijama koje su pratile razvoj projekta i komentarima vezanim za sam izgled rada.

Literatura

Arbutina B. 2009. Minimalni odnos masa za kontaktne tesne dvojne sisteme tipa W Ursae Majoris. Doktorska disertacija. Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, Studenski trg16, Beograd

Boshkayev K. A., Rueda J., Zhami B., Kalymova, Zh., Balgymbekov G. 2016*a*. Equilibrium structure of white dwarfs at finite temperatures. *International Journal of Modern Physics: Conference Series*, **41**: 1660129

Boshkayev K. A., Quevedo H., Zhami B. 2016*b*. I-Love-Q relations for white dwarf stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society,* **464** (4): 4349.

Boshkayev K. A., Quevedo H., Kalymova Z., Zhami B. 2016*c*. Hartle formalism for rotating Newtonian configurations. *European Journal of Physics*, **37** (6): 065602.

Carvalho S. M. de, Rotondo M., Rueda, J., Ruffini R. 2014. The relativistic Feynman–Metropolis–Teller treatment at finite temperatures. *Physical Review C*, **89** (1): 015801.

Chandrasekhar S. 1933. The equilibrium of distorted polytropes. I. The rotational problem. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **93**: 390.

Chandrasekhar S. 1934. Stellar configurations with degenerate cores. *The Observatory*, **57**: 373.

Doneva D., Yazadjiev S., Stergioulas N., Kokkotas K. 2014. Breakdown of I-Love-Q universality in rapidly rotating relativistic stars. *The Astrophysical Journal Letters*, **781** (1): L6.

Eggleton P. 2006. *Evolutionary Processes in Binary and Multiple Stars*. Cambridge University Press

Feynman R., Leighton R., Sands M. 2013. *The Feynman Lectures on Physics, Vol II*. California Institute of Technology

Griffiths D. 1999. *Introduction to Electrodynamics*. New Jersey: Prentice-Hall

Kippenhahn R., Thomas H. 1969. A Simple Method fot the Solution of the Stellar Structure Equations incluing Rotation and Tidal Forces. U *Stellar rotation* (ur. A. Slettebak). Springer, str. 20-30.

Kippenhahn R., Weigert A., Weiss A. 2012. *Stellar Structure and Evolution.* Second Edition. Springer

Laarakkers W., Poisson E. 1998. Quadrupole moments of rotating neutron stars. *The Astrophysical Journal*, **512** (1): 282.

Landau L. D., Lifshitz E. M. 1980. *Statistical Physics Part 1*. 3rd Edition. Pergamon Press

Poisson E., Will C. 2014. *Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic*. Cambridge: Cambridge University Press

Radojević D. 2009. Analiza Čandrasekarove granice. *Petničke sveske*, 67: 36.

Rotondo M., Rueda J., Ruffini R., Xue S. 2010. On the relativistic Thomas-Fermi treatment of compressed atoms and compressed nuclear matter cores of stellar dimensions. *Physical Review C*, **83**: 045805.

Salpeter E. 1961. Energy and Pressure of a Zero-Temperature Plasma. *The Astrophysical Journal*, **134**: 669.

Vukićević-Karabin M., Atanacković O. 2010. *Opšta astrofizika*. Beograd: Zavod za udžbenike

Yagi K., Yunes N. 2013. I-Love-Q Relations in Neutron Stars and their Applications to Astrophysics, Gravitational Waves and Fundamental Physics. *Physical Review D*, **88**: 023009.

Yagi K., Stein L., Pappas G., Yunes N., Apostolatos T. 2014. Why I-Love-Q. *Physical Review D*, **90**: 063010.

Yagi K., Yunes N. 2016. Approximate Universal Relations for Neutron Stars and Quark Stars. *Physics Reports*, **681**: 1.

Vladan Đukić

Universality of I-Love-Q relations in White Dwarf Stars

This paper explores the universality of I-Love-Q relations (moment of inertia, Love number and quadrupole moment) for various equations of state and angular velocities in white dwarf stars. The moment of inertia describes the rotational inertia of a body, the Love number quantifies the deformability of an object in rotation, and the quadrupole moment quantifies the deviation of the shape of an object from spherical symmetry in the context of its gravitational field. Even though those quantities depend on the equation of state, recently it has been found that, in neutron stars, relations between suitably normalized values of these quantities do not depend sensitively on the neutron star's internal structure in the slowly-rotating approximation. The purpose of this paper is to explore whether those relations hold in white dwarf stars as well. The equations of state on which universality has been tested are polytropic equations of state for $n = 1.5$ and $n = 3$ polytropic indexes and the Chandrasekhar equation of state for $T = 0$ K. The structure of slowly-rotating white dwarfs is modeled by virtue of the Kippenhahn-Thomas approximation. The moment of inertia is obtained from the solution of the equation of structure. The Love number and quadrupole moment were obtained from the solutions of the equation of structure and the modified Clairaut-Radau equation. For these equations of state in nonrotating white dwarfs it is shown that there exists universality

with relative deviation smaller than 6% in the case of I-Q, 1.5% in the case of I-Love relations, and smaller than 4% in the case of Q-Love relations, compared to the I-Love-Q relations for the $n = 1$ polytrope which can be calculated analytically. Additionally, it is shown that rotation does not influence the universality of those relations in the case of the Chandrasekhar equation of state for $T = 0$ K, the relations are shown to be universal with relative deviation smaller than 6% in the case of I-Q and I-Love relations, and smaller than 2% in the case of Q-Love relations from the $n = 1$ non-rotating polytrope.