

Analitički model spiralne galaksije: evolucija disperzije brzina globularnih jata

Analizirana je disperzija brzina globularnih jata u gravitacionom polju galaksije Andromeda (M31). Za izračunavanje orbita globularnih jata korišćen je model analitičkog potencijala galaksije koji se sastoji iz tri komponente: Hernquistovog modela za centralni oval, diska Miyamoto-Nagai i tamnog haloa NFW. Orbite su računane korišćenjem Runge-Kutta metoda četvrtog reda sa adaptivnim korakom. Rezultati pokazuju da disperzija brzina globularnih jata ostaje konstantna tokom 3 milijarde godina i slaže se sa posmatranom.

Uvod

Galaksija je gravitaciono vezan sistem koji se sastoji od zvezda, međuzvezdane materije, gasa, prašine i tamne materije koja je grupisana u tri celine – centralni oval, disk i tamni halo. U središtima najvećeg broja galaksija se nalaze supermasivne crne rupe i utvrđeno je da one utiču na formiranje galaksije i disperziju brzina zvezda unutar centralnog ovala. Globularna zvezdana jata su gravitaciono vezane grupe zvezda koje se kreću kroz galaksiju i mogu brojati od nekoliko desetina do nekoliko stotina hiljada članova. Pretpostavlja se da su globularna jata nastala kada i galaksija u kojoj se nalaze.

Cilj ovog rada je formiranje analitičkog modela spiralne galaksije da bi se ispitala konstantnost disperzije brzina globularnih jata tokom vremena. Konstantnost disperzije će omogućiti dalji nastavak rada u kojem se nastoji objasniti povezanost između disperzije brzina globularnih jata i mase supermasivne

crne rupe u centru galaksije, odnosno M-sigma relacija (Sadoun i Colin 2012).

Metod

Analitički model galaksije napravljen je korišćenjem različitih modela za centralni oval, disk i tamni halo.

Gravitacioni potencijal centralnog ovala je izražen Hernquist-ovom formulom (Hernquist 1990):

$$\Phi_b = -\frac{GM_b}{r+c} \quad (1)$$

gde je G gravitaciona konstanta, M_b masa centralnog ovala, r rastojanje od centra galaksije i c karakteristična dužina centralnog ovala. Gravitacioni potencijal diska je određen pomoću Miyamoto-Nagaievog modela (Miyamoto i Nagai 1975):

$$\Phi_b = -\frac{GM_d}{\sqrt{r^2 + \left(a_d + \sqrt{z^2 + b_d^2}\right)^2}} \quad (2)$$

gde je M_d masa diska, a_d karakteristična dužina skala, z rastojanje normalno na ravan diska, a b_d karakteristična visina. Na osnovu NFW profila gustine (Navarro *et al.* 1996), određen je gravitacioni potencijal tamnog haloa koji ima oblik (Geehan *et al.* 2006):

$$\Phi_h = -4\pi G\rho_c \delta_c r_h^2 \left(\frac{r_h}{r}\right) \ln\left(\frac{r+r_h}{r_h}\right) \quad (3)$$

Ana Bogdanović (1995), Loznica, Vlade Zečevića 14/25, učenica 2. razreda Gimnazije „Vuk Karadžić” u Loznici

Maga Rajić (1995), Pazin (Hrvatska), Pristava 10, učenica 3. razreda Gimnazije i strukovne škole Jurija Dobrila u Pazinu

MENTORI:

Andrej Obuljen, student master studija astrofizike, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu

Nemanja Martinović, istraživač saradnik Astronomske opservatorije, Beograd

Miroslav Mičić, naučni saradnik Astronomske opservatorije, Beograd

gde je ρ_c kritična gustina, δ_c bezdimenzioni parametar gustine i r_h karakteristična dužina tamnog haloa.

Ovi modeli su aksijalno i sferno simetrični i dobro aproksimiraju galaksiju, što je bitno za potrebe ovog rada.

U ovom radu zvezdano jato je aproksimirano česticom jedinične mase, odnosno materijalnom tačkom. Nije uzeta u obzir interakcija između čestica. Zvezdano jato se kreće kroz galaksiju i na njegovo kretanje utiču gravitacioni potencijal centralnog ovala, diska i tamnog haloa.

Početni uslovi su zadati tako što su globularnim jatima nasumično dodeljene sferne koordinate (ϑ, φ, r) , pri čemu je $r < 10$ kpc. Sferne koordinate se potom prevode u Dekartov koordinatni sistem:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

Kada su određene Dekartove koordinate, zvezdanim jatima se dodeljuju početne brzine. Da bi zvezdana jata mogla da kruže po zatvorenim orbitama i ne budu izbačena iz gravitacionog polja galaksije, njihova brzina v koja se nasumično određuje mora biti manja od cirkularne brzine v_c koja predstavlja kvadratni koren gravitacionog potencijala galaksije:

$$v_c = \sqrt{|\Phi_b + \Phi_d + \Phi_h|}$$

što je dalje, uvrščivanjem formula (1) za Φ_b , (2) za Φ_d i (3) za Φ_h , u ovu formulu jednako:

$$v_c = \left(\frac{GM_b}{r+c} + \frac{GM_d}{\sqrt{r^2 + \left(a_d + \sqrt{z^2 + b_d^2}\right)^2}} + 4\pi G \rho_c \delta_c r_h^2 \left(\frac{r_h}{r}\right) \ln\left(\frac{r+r_h}{r_h}\right) \right)^{1/2}$$

Brzina ima tri komponente (v_x, v_y, v_z) koje zadovoljavaju uslov:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

i izračunavaju se na sledeći način:

$$\begin{aligned} v_x &= v(\sin \alpha \cos \vartheta \cos \varphi - \cos \alpha \sin \varphi) \\ v_y &= v(\sin \alpha \cos \vartheta \sin \varphi + \cos \alpha \cos \varphi) \\ v_z &= -v \sin \alpha \sin \vartheta \end{aligned}$$

gde je α nasumično izabran ugao između 0 i 2π u ravni tangentnoj na početni položaj koju obrazuju ortovi $\vec{e}(\vartheta)$ i $\vec{e}(\varphi)$.

Ubrzanje zvezdanih jata predstavlja negativan gradijent ukupnog potencijala:

$$\vec{a} = -\nabla\Phi(r)$$

Za izračunavanje brzina i pozicija zvezdanog jata tokom vremena koristi se Runge-Kutta metod četvrtog reda (Teukolsky 2007), zbog velike stabilnosti i preciznosti. Runge-Kutta metod je numerički metod kojim se vrši integracija običnih diferencijalnih jednačina pomoću koraka u sredini i na krajevima intervala kako bi se umanjile greške.

Zbog naglih povećanja brzine pri prolasku zvezdanog jata blizu centralnog ovala i usporenja na velikim udaljenostima uvodi se adaptivni korak radi veće preciznosti. Adaptivni korak je prilagođavanje veličine koraka ubrzanju tela, tj. telo će imati manji korak kada se kreće većim ubrzanjem, a veći kada je ubrzanje manje. Kroz interval se prolazi prvo sa celim, a zatim dva puta sa duplo manjim korakom. Nakon toga se određuje razlika Δ između ubrzanja na kraju i na polovini intervala. Ako je ta razlika manja od zadate vrednosti $\varepsilon = 10^{-5}$ prelazi se na sledeći interval sa povećanim korakom $h = h \left(\frac{\varepsilon}{\Delta}\right)^{1/4}$, a ako nije interval se ponavlja sa polovinom tog koraka.

Ukupna energija jata predstavljena je kao zbir kinetičke i potencijalne energije po jedinici mase:

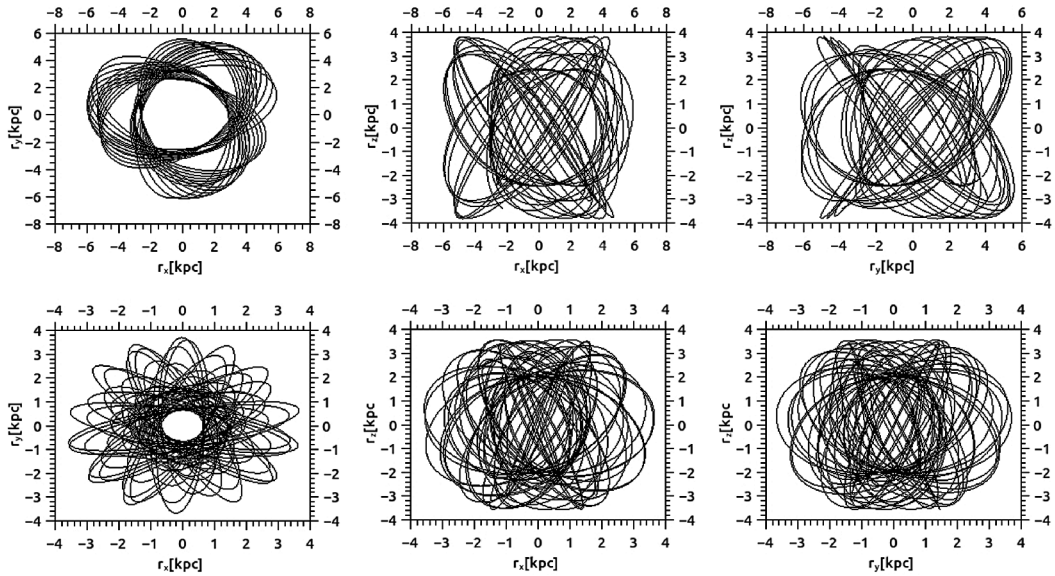
$$E = -\frac{GM_b}{r+c} - \frac{GM_d}{\sqrt{r^2 + \left(a_d + \sqrt{z^2 + b_d^2}\right)^2}} - 4\pi G \rho_c \delta_c r_h^2 \left(\frac{r_h}{r}\right) \ln\left(\frac{r+r_h}{r_h}\right) + \frac{v^2}{2} \quad (4)$$

Relativna promena energije računa se prema sledećoj formuli:

$$\Delta E = \frac{E_f - E_i}{E_i} \quad (5)$$

gde je E_f energija na kraju, a E_i energija na početku simulacije.

Pušta se 1000 jata da evoluiraju 3 milijarde godina. Na početku se u jedan fajl zapisuju početni parametri za svako jato – koordinate x, y i z i brzine v_{x0}, v_{y0} i v_{z0} . Da bi se utvrdila stabilnost orbite, trajektorije zvezdanih jata se iscrstavaju na grafik (slika



Slika 1. Orbite dva zvezdana jata posmatrana u xy , xz i yz ravni

Figure 1. Orbits of two globular clusters shown in xy , xz and yz planes

1). Na svakih 0.1 milijardi godina u fajl se zapisuju trenutne brzine v_x , v_y i v_z i trenutne pozicije x , y i z . Na osnovu ovih podataka računa se disperzija brzina tokom vremena:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (v_x - \langle v_x \rangle)^2}{N}}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (v_y - \langle v_y \rangle)^2}{N}}$$

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{\sum (v_z - \langle v_z \rangle)^2}{N}}$$

pri čemu je N broj zvezdanih jata.

Kako bi dobijene disperzije brzina mogle da se uporede sa posmatranim, brzine su projektovane na pravac posmatranja Andromedine galaksije. Ovaj pravac je definisan pomoću uglova φ i ϑ , gde se ugao φ bira slučajno, a ϑ je ugao inklinacije:

$$v = v_x \sin \vartheta \cos \varphi + v_y \sin \vartheta \sin \varphi + v_z \cos \vartheta$$

Disperzija za ovaj pravac računa se na isti način kao i disperzije po osama x , y i z .

Kod za integraciju orbita globularnih jata napisan je u programskom jeziku IDL, zbog lake i brze obrade velike količine podataka.

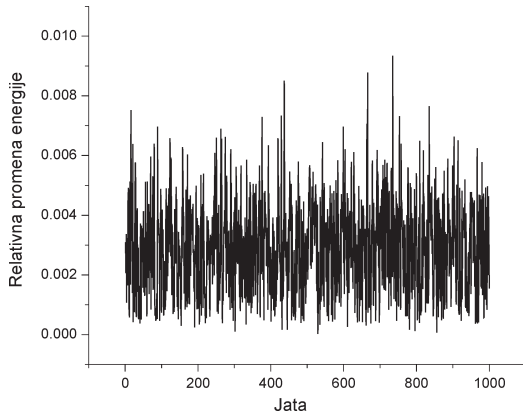
Rezultati

Vrednosti konstanti i parametara koji su korišćeni u ovom radu su sledeće (Geehan *et al.* 2006):

G	$4.4942 \cdot 10^4 \text{ kpc}^3 / (10^{10} \text{ M}_{\text{Sun}} \text{ Gyr}^2)$
M_b	$3.4 \cdot 10^{10} \text{ M}_{\text{Sun}}$
c	0.6 kpc
M_d	$8.4 \cdot 10^{10} \text{ M}_{\text{Sun}}$
a_d	5.4 kpc
b_d	0.3 kpc
ρ_c	$2.7772 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{10} \text{ M}_{\text{Sun}} / \text{kpc}^3$
δ_c	270000
r_h	8.18 kpc
ϑ	77.5°

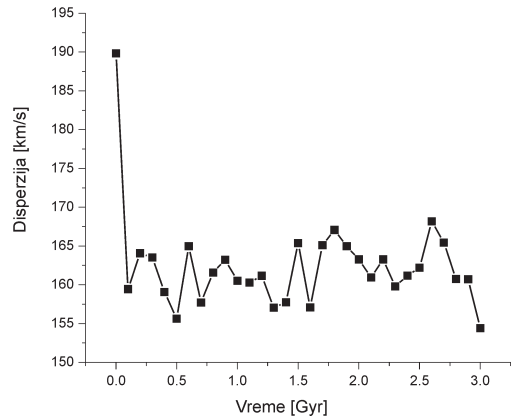
Energija jata koja je izračunavana po formuli (4) zapisivana je u fajlove za svako jato, a zatim je izračunat udeo promene energije po formuli (5) koji je predstavljen na grafiku (slika 2).

Sa grafika se može videti da se energija održava i posle 3 milijarde godina, sa promenom manjom od 1% za sva jata, što znači da jata neće napustiti galaksiju tokom evolucije, što je uslov za izračunavanje disperzije brzina zvezdanih jata. Na slici 1 prikazane su dve orbite zvezdanih jata posmatrane u različitim



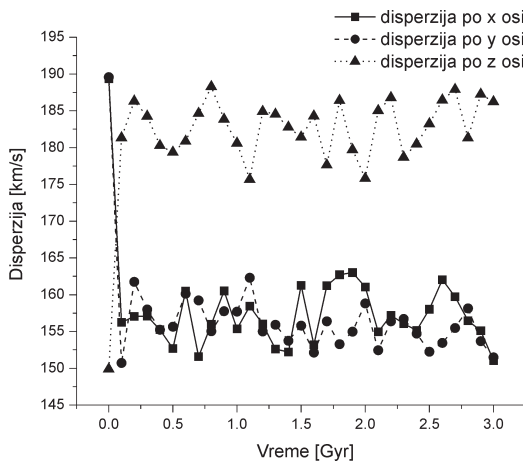
Slika 2. Relativna promena energije zvezdanih jata

Figure 2. Relative variation of star clusters' energy



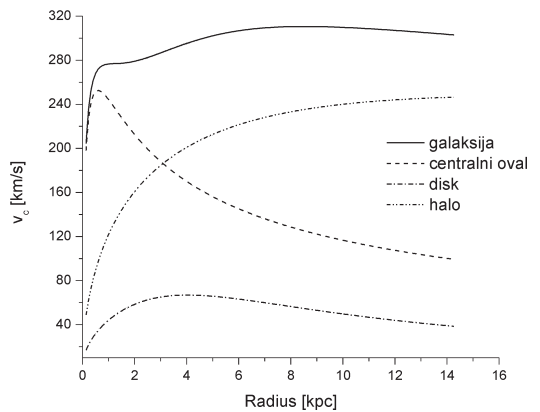
Slika 4. Disperzija brzina projektovana na pravac posmatranja Andromedine galaksije

Figure 4. Velocity dispersion projected on the direction of observation



Slika 3. Disperzija brzina duž x , y , z osa

Figure 3. Velocity dispersion along the x , y , z axis



Slika 5. Rotaciona kriva galaksije, centralnog ovala, diska i tamnog haloa

Figure 5. Rotational curve of the galaxy, bulge, disk and dark halo

ravnima. Vizuelni prikaz trajektorija (slika 1) potvrđuje stabilnost orbita: da su trajektorije haotične, to bi ukazivalo na nestabilnost sistema koji je formiran.

Položaji i brzine zvezdanih jata zapisivani su za vremenski period od 3 milijarde godina. Slika 3 predstavlja disperziju duž x , y i z ose. Disperzija brzina po z osi veća je od disperzije po x i y osi. To se dešava zato što je disk aksijalno, a ne sferno simetričan. Kako je u realnom slučaju nemoguće posmatrati

galaksiju tj. jata iz tačno tih pozicija, izračunata je disperzija brzina po pravcu iz kog se ta galaksija vidi. U ovom radu je uzet pravac galaksije Andromede, čija je inklinacija $\vartheta = 77.5^\circ$ (Jun 2001). Kako disperzija dobijena za početne položaje jata mnogo odstupa od ostalih i menja konačni rezultat, nije korišćena za izračunavanje disperzije. Dobijena disperzija je $\sigma = (158 \pm 7)$ km/s.

Rotaciona kriva galaksije, tj. zavisnost cirkularnih brzina jata od njihove udaljenosti od centra galaksije, prikazana je na slici 5, zajedno sa rotacionom krivom tamnog haloa, diska i centralnog ovala.

Zaključak

Analitički model korišćen u ovom radu zadovoljavajuće predstavlja spiralnu galaksiju. Disperzije dobijene u ovom radu podudaraju se sa prethodno utvrđenim disperzijama (Frederici *et al.* 1993). Može se zaključiti da disperzija brzina zvezdanih jata tokom vremena ostaje približno konstantna. Skaliranjem parametara galaksije može se utvrditi menja li se disperzija brzine globularnih jata u zavisnosti od mase galaksije, i na taj način ispitati postojanje posmatrane M-sigma relacije za globularna jata.

Zahvalnost. Autori se zahvaljuju osobama čija su pomoć, sugestije i podrška doprineli ostvarenju ovog rada: Andreju Obuljenu, Nemanji Martinoviću i Miroslavu Mičiću.

Literatura

- Bekki K., Couch W. J., Drinkwater M. J., Gregg M. D. 2001. A new formation model for M32: a thresholded early-type spiral galaxy. *Astrophysical Journal Letters*, **557** (1): L39.
- Binney J., Tremaine S. 2008. *Galactic dynamics*. Princeton: Princeton University Press
- Dinescu D. I., Girard T. M., Van Altena W. F. 1999. Space velocities of globular clusters. Cluster orbits and halo substructure. *The Astronomical Journal*, **117**: 1792.
- Frederici L., Bonoli F., Ciotti L., Fusi-Pecci F., Marano B., Lipovetsky V. A. 1993. Kinematics of a sample of globular clusters in the halo and the mass of M31. *Astronomy and Astrophysics journal*, **274**: 87.
- Geehan J. J., Fardall M. A., Babul A., Guhathakurta P. 2006. Investigating the Andromeda

Bulge-Disk-Halo Model for M31. *MNRAS*, **366**: 996.

Hernquist L. 1990. An analytical model for spherical galaxies and bulges. *Astrophysical Journal*, **356**: 359.

Jun M. 2001. Structure and inclination angle of the spiral galaxy M31. *Chinese Phys. letters*, **18**: 1420.

Miyamoto M., Nagai R. 1975. Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies. *Astronomical Society of Japan*, **27**: 533.

Navarro J. Frenk C. White S. 1996. The Structure of Cold Dark Matter Halos. *Astrophysical Journal*, **462**: 563.

Sadoun R., Colin J. 2012. $M_{\text{BH}}-\sigma$ relation between SMBHs and the velocity dispersion of the globular cluster systems. *MNRAS*, **426**: 51.

Teukolsky S. Vetterling W. Press W. Flannery B. 2007. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Third Edition. Cambridge University Press

Ana Bogdanović and Maga Rajić

Analytical Model of Spiral Galaxy: Evolution of Velocity Dispersion of Globular Clusters

In this paper the velocity dispersion of globular clusters in the gravitational field of the Andromeda galaxy (M31) was analyzed. For calculating the orbits of globular clusters, a model for the analytical potential of a galaxy which consists of three components: Hernquist's model for bulge, Miyamoto-Nagai model for disk and NFW for dark halo, was used. The orbits were calculated using the fourth-order Runge-Kutta method with adaptive step-size. The results show that the velocity dispersion of globular clusters remains constant during 3 billion years, and is in compliance with observations. 