Vanja Šarković i Filip Živanović

Modeliranje inflacije korišćenjem modifikovane opšte teorije relativnosti

Cilj ovog rada je da se ustanovi da li inflacija Starobinskog može da ispuni neke osnovne zahteve inflatornog modela. Ideja je bila da se jednostavnim modifikacijama opšte teorije relativnosti nađe zadovoljavajući okvir za opis inflacije koji ne uključuje fiziku čestica – inflacija Starobiniskog je model inflacije koji zadovoljava ove uslove i na koju će se primeniti modifikacije opšte teorije relativnosti. Rešavanjem modifikovanih Friedmanovih jednačina dobijena je nova diferencijalna jednačina koja je dalje rešavana pomoću metoda Runge-Kutta četvrtog reda. Dobijeni su grafici zavisnosti faktora razmere, njegovog prvog i drugog izvoda u zavisnosti od vremena kao i zavisnost Ričijevog skalara u zavisnoti od vremena. Analizirana je evolucija ovih parametara tokom i odmah posle inflacije.

Uvod

Univerzum je nastao pre oko 13.7 milijardi godina, posle Velikog praska (engl. Big Bang). Nakon samog Velikog praska Univerzum se razvijao u raznim fazama. Prva od njih bila je Plankova epoha koja je trajala do 10-43 s nakon Velikog praska i tokom ove epohe su sve četiri fundamentalne interakcije (gravitacija, elektromagnetna, slaba i jaka) bile jedna unifikovana interakcija. Potom je usledila epoha Velikog ujedinjena koja je trajala od 10-43 do 10-36 s i smatra se da potom počinje epoha inflacije (Weinberg 2008).

Inflacija je period koji je trajao veoma kratko i tokom kog se svemir širio približno eksponencijalno. Inflacija je hipoteza koja je postavljena kao dodatak na osnovnu teoriju Velikog praska jer objašnjava više fundamentalnih problema na koje Veliki prasak bez inflacije ne pruža odgovore. Među njima su problem horizonta (engl. Horizon Problem), problem monopola (engl. Monopoly problem), problem homogenosti velikih stuktura (engl. Large scale homogenity problem) i problem ravnine (engl. Flatness Problem). Za ove probleme inflacija daje prirodno objašnjenje.

Postoji mnoštvo različitih modela kojima se inflacija opisuje, ali nezavisno od detalja, zajedničke osobine svih njih su posmatrački proverene (na primer jedna od potvrda predstavlja poklapanje posmatranja sitnih nehomogenosti u mikrotalasnom pozadiskom zračenju sa predviđanjima datim na osnovu teorije inflacije), tako da se može reći da ova teroija stoji na relativno čvstom tlu – potkrepljenim i teorijom i posmatranjima (Weinberg 2008).

Uzrok inflacije se najčešće dovodi u vezu sa razdvajanjem jake od elektromagnetne i slabe interakcije pri čemu je velika količina energije oslobođena u tom razdvajanju izazvala jako širenje svemira za kratko vreme. Međutim, proučavanje singulariteta u opštoj teoriji relativnosti (među kojima je i Veliki prasak) pokazalo je da se modifikacijom OTR za velike krivine prostor-vremena izbegavaju singlulariteti, a takođe se ispostavlja da se uz neke jednostavnije modifikacije može naći zadovoljavajući okvir za opis inflacije – poput inflacije Starobiniskog koja ne uključuje fiziku čestica, već uzima jedan oblik modifikovanih jednačina opste teorije relativnosti.

Inflacija Starobinskog zamenjuje skalarnu krivinu R (Ričijev skalar) sa funkcijom $f(R)$ čiji oblik može da varira – bitno je da u njoj figuriše Ričijev slakar više različitih stepena. U izloženom modelu

Vanja Šarković (1994), Beograd, Silvija Kranjčevića 14, učenica 3. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

Filip Živanović (1992), Beograd, Borska 13, učenik 4. razrada Matematičke gimnazije u Beogradu

MENTOR:
Marko Simonović, International School for Advanced Studies in Trieste, Trst

uzeta je funkcija koja se za male krivine svodi na standardni oblik širenja (stepeni), a u slučaju velikih zakrivljenosti ima drugačije ponašanje, eksponencijalno širenje.

Cilj ovog rada je da se ustanovi da li inflacija Starobinskog sa unetim modifikacijama OTR može da ispuni neke osnovne zahteve inflatornog modela – eksponencionalno širenje tokom inflacije, red veličine za koji se svemir raširio i da li postoji kraj inflatornog širenja koji omogućava gladak prelazak na stadardno širenje.

Teorijski osnovi

OTR odlično opisuje gravitaciju i ne postoji ni jedno posmatranje ni eksperiment koji dolazi u nesuglasicu sa teorijom. Ipak jedan od velikih problema teorije je postojanje singulariteta u kojima krivina prostor-vremena postaje praktično beskonačna. To znači da u takvim situacijama teorija praktično prestaje da važi. Međutim, ukoliko se modifikuju polazne jednačine OTR mogu se rešiti neki od problema sigulariteta. Modifikacija o kojoj je reč predstavlja modifikaciju Ajnštajn–Hilbertovog dejstva:

$$S = -\frac{1}{2k}\int f(R)\sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4 x \tag{1}$$

Osnovna zamisao modela je da se skalarna krivina R (Ričijev skalar) zameni funkcijom $f(R)$ koja se za male krivine svodi na standardni oblik, a u slučaju velikih zakrivljenosti ima drugačije ponašanje koje može da otkloni problem singulariteta. Međutim, ovakve modifikacije mogu imati i kosmološke posledice jer utiču na ponašanje Univerzuma u ranim fazama evolucije kada je zakrivljenost prostor-vremena bila jako velika.

Kao jedna moguća modifikacija može se razmotriti funcija oblika $f(R) = R + \alpha R^n$ ($\alpha > 0$, $n \in N$), (De Felice *et al*. 2010), jer ima jako jednostavnu formu, ukuljučuje dva parametra, pa je samim tim zgodna za korišćenje. Sem toga, dodatni član αR^n postaje važan za velike zakrivljenosti – veliko R, dok za malo R – $R - f(R)$ postaje približno R, pa Ajnštajnove jednačine dobijaju njihov klasičan oblik. Ovaj tip modifikacije biće korišćen u ovom radu za opis inflatornog širenja Univerzuma.

Da bi se opisao model Univerzuma u ovako modifikovanoj teoriji potrebno je rešiti modifikovane Fridmanove jednačine. U standardnoj OTR Fridmanove jednačine glase:

$$\left(\frac{1}{a(t)}\cdot\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{8\pi\gamma}{3}\cdot\rho - \frac{Kc^2}{a^2(t)} \tag{2}$$

$$\frac{1}{a(t)}\cdot\frac{\mathrm{d}^2a(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{4\pi\gamma}{3}\cdot\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) \tag{3}$$

gde je ρ gustina energije, a P pritisak. Ove jednačine opisuju dinamiku širenja svemira koja je sadržana u evoluciji scale factor-a a i važe za homogen, izotropan, nestatičan i povezan svemir poput našeg.

Prethodno pomenutim modifikacijama OTR-a Friedmanove jendačine poprimaju novi oblik (Felice i Tsujikawa 2010):

$$3F(R)H^2 = \frac{F(R)R - f(R)}{2} - 3H\dot{F}(R) + k^2\rho \tag{4}$$

$$3F(R)H^2 = \ddot{F}(R) - 3H\dot{F}(R) + k^2(\rho + P) \tag{5}$$

pri čemu je $F(R) = \frac{\partial F(R)}{\partial R}$. Treba primetiti da se modifikovane Fridmanove jednačine za slučaj $f(R) = R$ svode na obične Fridmanove jednačine.

Za modeliranje Univerzuma same Friedmanove jednačine nisu dovoljne, pa je potreban dodatan uslov u obliku jednačine za održanje energije, ova jednačina se svodi na jednačinu kontinuiteta (Peebles 1993). Jednačina kontinuiteta je definisana kao:

$$\dot{\rho} = 3H(\rho + P) = 0 \tag{6}$$

gde je P pritisak idealnog fluida. Jednačine (4) i (5) su međusobno ekvivalente ukoliko jednačina kontinuteta (6) važi. Da bi se dobio model Univerzuma resave se sistem jednačina (4), (6) ili (5), (6) uz zadavanje odgovarajućuh uslova.

Jednačina kontinuiteta integracijom daje zavisnost gustine od vremena:

$$\rho \sim a(t)^{-3(1+w)}\rho_0 \tag{7}$$

gde je w – faktor definisan kao $w = \frac{P}{\rho}$. Ovaj parametar je jednak $w = 0$ za običnu materiju, $w = \frac{1}{3}$ za zračenje, a $w = -1$ za tamnu energiju.

Skalarna krivina je u slučaju ravnog, homogenog i izotropnog svemira povezana s faktorom razmere na sledeći način (Felice i Tsujikawa 2010):

$$R = 6(2H^2 + \dot{H}) \tag{8}$$

gde je $H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ Hablov parametar. Faktor razmere $a(t)$ govori o načinu na koji se svemir razvija tokom vremena – na primer $\frac{a(t)}{a(t_0)}$ predstavlja odnos udaljenosti između proizvoljne dve tačke prostora u momentima t i t_0.

Model i metod

U ovom radu razmotren je slučaj modifikacije $f(R) = R + \alpha R^2$, kao i specijalan slučaj $f(R) = R^2$ – kada je α jako veliko pa se lineraran član R može zanemariti. Treba napomenuti da se ove jednačine kandiduju za opis inflacije samo gravitacijom. Nedostatak korišćenog modela je činjenica da ne opisuje tako dobro svemir mnogo kanije nakon inflacije.

U ovom radu su izvedene modifikovane jednačine za oba slučaja. Kada se zavisnost (7) iskoristi u jednačini (4) i kada se $f(R)$, $F(R)$ i $\dot{F}(R)$ izraze preko R i $\dot{R}$ a potom iz jednačine (8) R izrazi preko H i zamenom $H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ dobija se diferencijalna jednačina trećeg reda po faktoru razmere α:

za $f(R) = R + \alpha R^2$

$$\dot{c} = \frac{\ddot{a}^2}{2\dot{a}} - \frac{\dot{a}\ddot{a}}{a} + \frac{3\dot{a}^3}{2a^2} - \frac{\dot{a}}{12\alpha} + \frac{k^2\rho_0^{1-3w}}{36\alpha\dot{a}a^2} \qquad (9)$$

za $f(R) = R^2$

$$\dot{c} = \frac{\ddot{a}^2}{2\dot{a}} - \frac{\dot{a}\ddot{a}}{a} + \frac{3\dot{a}^3}{2a^2} + \frac{k^2\rho_0^{1-3w}}{36\dot{a}a^2} \qquad (10)$$

Ove jednačine se rešavaju numerički. Uvođenjem smene $b = \dot{a}$, $c = \ddot{a}$ dobija se sistem od tri spregnute diferencijalne jednačine prvog reda za oba slucaja, i one se potom rešavaju numeričkom metodom Runge--Kutta četvrtog reda.

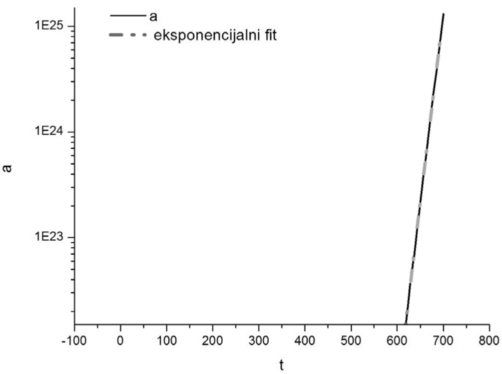
Za numeričko dobijanje funkcija a, b i c potrebno je znati njihove početne vrednosti. Kako je faktor razmere veličina koja predstavlja odnos rastojanja dva tačke u datom trenutku za početnu vrednost se može uzeti da je $a_0 = 1$. Kako je dinamika sistema takva da daje eksponencijalno širenje bezobzira na početne uslove b_0 i c_0 se biraju proizvoljno. U radu je uzeto $b_0 = 0.1$ i $c_0 = 0.05$.

Početna gustina ρ_0 je uzeta da je 0 jer će se inflacija Starobinskog odviti bez obzira na prisustvo ili odsustvo materije. Kada je uzeta u obzir ova aproksimacija iz jednačine (9), kao i iz jednačine (10) izbačen je član koji zavisi od w – te je jedini parametar koji moze varirati α, i to samo u prvom slučaju – tj. jednačini (9).

Numeričkom integracijom jednačina (9) i (10), koje predstavljaju dva odvojena slučaja, dobijaju se grafici zavisnosti faktora razmere, njegovog prvog i drugog izvoda od vremena, kao i zavisnost Ričijevog skalara od vremena. Grafici dobijeni za isti broj iteracija korišćenjem jednačine (10) se međusobno porede sa graficima dobijenim pomoću jednačine (9) za različite vrednosti parametra α.

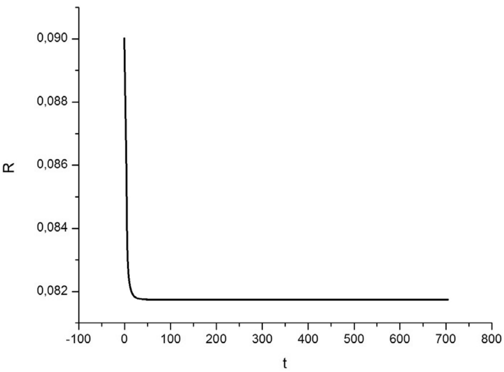
Rezultati

Grafici zavisnosti faktora razmere (a) i grafik zavisnosti Ričijavog skalara (R) od vremena su dati zajedno prvo za specijani slučaj, potom za osnovni slučaj. U prvom slučaju će biti izloženi grafici za α i odgovarajuće t – to je vreme koje omogućava dovoljan broj iteracija da bi gore navedeni parametri prošli kroz potrebnu evoluciju. Kraj inflacije je određen trenutkom kada je $c = 0$ i u istom trenutku vrednost b je maksimalna.



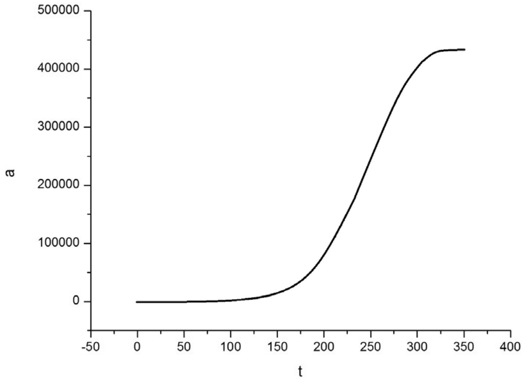
Slika 1. Specijalan slučaj – zavisnost parametara a od vremena za $t = 700$

Figure 1. Special case study – the evolution of the scale factor (a) with time (t) for $t = 700$



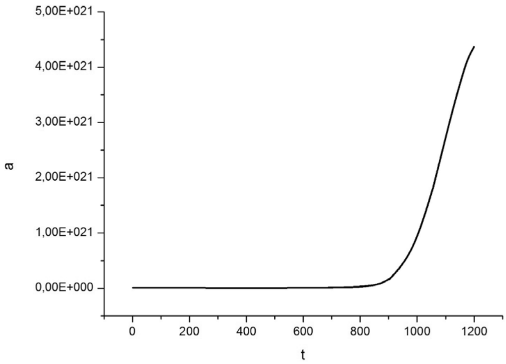
Slika 2. Specijalan slučaj – zavisnost parametra R od vremena $t = 700$

Figure 2. Special case study – the evolution of the Ricci scalar (R) with time (t) for $t = 700$



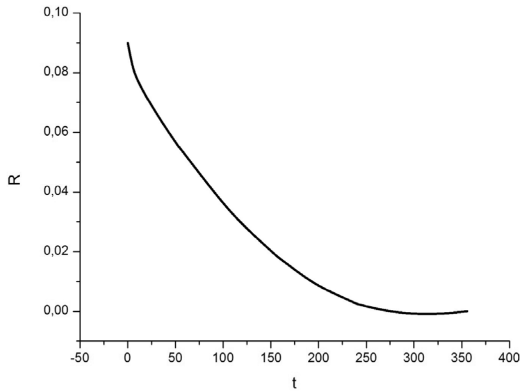
Slika 3. Osnovni slučaj – zavisnost parametara *a* od vremena za t = 350 i α = 100

Figure 3. Standard case study – the evolution of the scale factor (a) with time (t) for t = 350 and α = 100



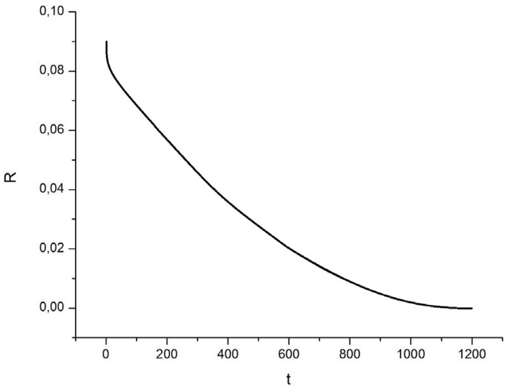
Slika 5. Osnovni slučaj – zavisnost parametra *a* od vremena za t = 1200 i α = 400

Figure 5. Standard case study – the evolution of the scale factor (a) with time (t) for t = 1200 and α = 400



Slika 4. Osnovni slučaj – zavisnost parametara *R* od vremena za t = 350 i α = 100

Figure 4. Standard case study – the evolution of the Ricci scalar (*R)* with time (t) for t = 350 and α = 100



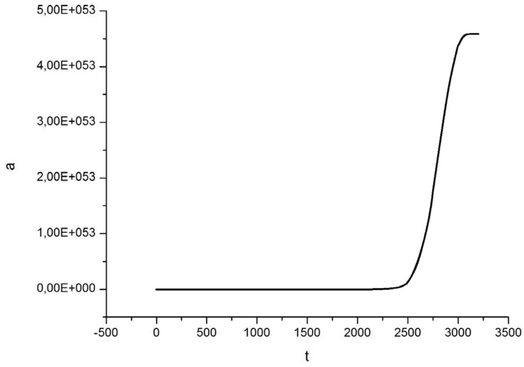
Slika 6. Osnovni slučaj – zavisnost parametra *R* od vremena za t = 1200 i α = 4 00

Figure 6. Standard case study – the the evolution of the Ricci scalar with time (t) for t = 1200 and α = 400

U specijalnom slučaju prikazanom na graficima 1 i 2 inflacija traje beskonačno i funkcije dobijene za a, b i c odgovaraju eksponencionalnim funkcijama, što je prikazano poklapanjem dobijene krive sa eksponencijalnim fitom (ova funkcija je oblika $y = y_0 + Ae^{-\frac{x}{t}}$ i prikazani fit odgovara vrednostimay_0 = 6.307, A = = 1.067 i t = –12.1). Ovako je pokazano da je širenje eksponencionalno dok je član R^2 dominantan. Takođe treba uočiti da vrednost ne konvergira ka nuli već postaje konstantna posle kratkog vremena i iznosi, u ovom slučaju, 0.082.

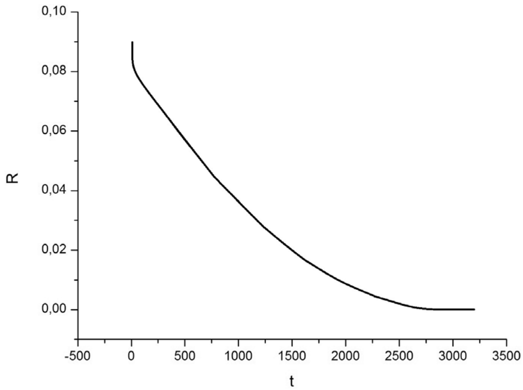
Takođe je primećeno da pri povećanju parametra α vreme trajanja perioda inflacije raste.

U opštem slučaju (α = 100 – grafici 3 i 4, α = = 400 – grafici 5 i 6 i α = 1000 – grafici 7 i 8) širenje je eksponencialno samo na početku, nakon toga širenje dobija formu stepene funkcije oblika



Slika 7. Osnovni slučaj — zavisnost parametra *a* od vremena za t = 3000 i α = 1000

Figure 7. Standard case study – the evolution of space factor (a) with time (t) for t = 3 000 and α = 1000



Slika 8. Osnovni slučaj — zavisnost parametra *R* od vremena za t = 3000 i α = 1000

Figure 8. Standard case study – the evolution of the Ricci scalar (R) with time (t) for t = 3000 and α = 1000

$a \sim t^{2/3}$. Takođe treba naglasiti da vrednost Ričijevog skalara sa vremenom postepeno opada u sva tri slučaja i pri tome konvergira ka nuli.

Zaključak

Model inflacije korišćen u radu, inflacija Starobinskog, je dobijen na osnovu modifikovane OTR koja zamenjuje skalarnu krivinu *R* (Ričijev skalar)sa funkcijom oblika $f(R) = R + \alpha R^n$ ($\alpha > 0$, $n \in N$), u ovom radu je uzeto $n = 2$. Utvrđeno je da ova modifikacija dozvoljava eksponencijalno širenje, što je jedan od osnovnih zahteva inflacije. Eksponencijano širenje koje traje duži period vremena za veću vrednost α. Za $\alpha \to \infty$ dobija se beskonačno eksponencijano širenje, a za manje vrednosti α dobija se konačna inflacija. Da bi se dobio odgovarajući stepen širenja mogu se uzimati različite vrednosti parametra α. Modifikacija oblika $f(R) = R + \alpha R^2$ omogućava eksponencijalno širenje koje glatko prelazi u standardno širenje i omogućava da vrednost Ričijevog skalara konvergira nuli. Dakle, korišćeni model i modifikovane Fridmanove jednačine su se pokazale podesnim za opisivanje razvića univerzuma tokom inflacije jer zadovoljavaju osnovne zahteve inflatornog modela.

Pri uvođenju modifikacija ili korekcija u OTR trebalo bi ispitati da li je α dovoljno malo da istovremeno omogući inflaciju i da ne remeti postojeće provere OTR – što u radu nije urađeno. Dalje, u radu je inflacija samo kvalitativno opisana i treba izvršiti reskaliranje da bi se dobijene vrednosti mogle izraziti preko realnih fizičkih jedinica. Poboljšanja korišćenog modela su moguća – na primer izbacivanje aproksimacije da je $\rho_0 = 0$.

Zahvalnost. Autori ovog rada žele da se posebno zahvale mentoru Marku Simonoviću na posvećenom vremenu, saradnji i sugestijama bez kojih ovaj rad ne bi bio potpun. Takođe zahvaljuju Ivanu Miliću na pruženoj pomoći i literaturi, kao i Dimitriju Radojeviću na pomoći oko softverskog dela ovog rada.

Literatura

Felice, De A., Tsujikawa Sh. 2010. f(R) theories. *Living Rev. Relativity*, **13**: 3.

Islam J. N. 1992. *Introduction to mathematical cosmology*. Cambridge: University Press

Liddle A. 2005. *An Introduction To Modern Cosmology*. New York: Wiley

Peacock J. A. 1999. *Cosmological physics*. Cambridge: University Press

Peebles P. J. E. 1993. *Principles of physical cosmology*. Princeton: University Press

Vukićević Karabin M. Atanacković Vukmanović O. 2003. *Opšta astrofizika*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva

Weinberg S. 2008. *Cosmology*. Oxford: Oxford University Press

Vanja Šarković and Filip Živanović

Modeling Inflation Using a Modified General Theory of Relativity

The goal of this paper is to determine if the given model (Starobinsky inflation) satisfies the basic requirements of inflation (exponential growth, the desired order of magnitude in growth and a smooth cross over from exponential to standard growth). Inflation lasts for only a short period of time and during that time space expands almost exponentially. By making simple modifications to the general theory of relativity we are able to portray inflation without any involvement in particle physics – such a description of the universe fits the Starobinsky inflation. The modification is performed by adding an additional factor to the Einstein-Hilbert action equation, therefore giving the modified Friedmann equations as a result. By solving the modified Friedmann equations we get a new equation which we further solve with a numerical method, a four step Runge-Kutta algorithm. Now it is possible to plot graphs of scale factor vs time, the first derivative vs time, the second derivate vs time, and the Ricci scar vs time – letting us observe the evolution of the given parameters during and shortly after inflation.

The model of inflation used in this project is a result of the modified general relativity. The modification applied replaced the Riccie scalar R with a function of R, $f(R) = R + \alpha R^2$ – this modification affects the Einstein-Hilbert action, therefore affecting the Friedmann equation and giving the modified Friedmann equations as a result, as it has been previously discussed. The modified Friedmann equations are one of the results of this paper. By dividing the model into two cases, one in which R^2 is dominant and the basic case where R^2 loses its dominance, it was recognized that the applied model allows exponential progress. The time spent in exponential growth is proportional to the value of α – for the case where $\alpha \to \infty$ the exponential growth never ceases (Figure 1). The value for R for smaller values of α converges to zero, while for large values of α after a short period of time R remains a constant. In order to gain the desired order of magnitude in growth one may vary the values for α. It is also important to state that the presented model provides a smooth cross over from exponential to standard growth therefore verifying that the model satisfies all the basic requirements.

It should be noted that while conducting modifications on the general theory of relativity one should check for the effect the modifications make in the post-inflation universe, and that the values given in the paper are only a quantum description, so there some recalling and recalibrating should be done in order for the given values to be given as real physical values. There are several modifications that can be made in order for the model to be more exact – for example, eliminating the approximation that the density of the universe is not zero in the beginning (this approximation can be taken into account, because the Starobinsky inflation will occur regardless of the presence of matter).