
Anđelka Milovanović

Gravitacioni uticaj masivnih Jupiterovih Trojanaca na stabilnost kretanja u oblasti L_4

Ispitan je gravitacioni uticaj tri najmasivnija Jupiterova Trojanca iz oblasti Lagranževe tačke L_4 (1437 Diomedes, 911 Agamemnon, 624 Hektor) na stabilnost kretanja 1000 fiktivnih Trojanaca u toj oblasti. U softverskom paketu OrbFit 4.2 numerički je simulirana njihova dinamička evolucija za vremenski interval od 50 miliona godina. Nakon tog vremenskog intervala neki asteroidi su ostali u L_4 , a neki usled poremećaja u kretanju su pobjegli iz posmatrane oblasti. Upoređena su dva seta rezultata dobijena iz simulacije sa istim početnim uslovima. U prvom setu uračunati su samo gravitacioni uticaji spoljašnjih planeta Sunčevog sistema, a drugom i uticaji masivnih Trojanaca. Istim softverom dobijeni su sopstveni elementi za opstale asteroide nakon 50 miliona godina i na osnovu njih je ispitana stabilnost u oblasti L_4 za oba slučaja. Rezultati su predstavljeni na mapama određenim prostorom parametara libracione amplitude i sopstvenog ekscentriciteta, odnosno sinusa sopstvene inklinacije, za oba seta simulacije. Na mapama se uočavaju zone stabilnosti, a upoređivanjem tih zona za dva razmatrana slučaja, konstatovane su primetne razlike. Zaključeno je da masivni Trojanci gravitaciono utiču na stabilnost asteroida u oblasti L_4 . Ovaj rezultat sugerije da u analizama stabilnosti Jupiterovih Trojanaca treba uzeti u obzir i njihove međusobne gravitacione uticaje.

Uvod

Još 1772. godine, Lagranž je konstatovao postojanje pet ravnotežnih tačaka (Lagranževe tačke) u redukovanom problemu tri tela, koji objašnjava kako se objekat zanemarive mase kreće u gravitacionom polju dva masivnija objekta. Tri od tih pet tačaka (L_1 , L_2 , L_3) su kolinearne i nestabilne, što znači da pod dejstvom malih poremećaja kretanja objekat zauvek napušta tačku u kojoj se nalazi. Preostale dve tačke, L_4 i L_5 , nalaze se na orbiti manje masivnog tela obrazujući sa njim i centrom mase sistema jednakostranične trouglove (slika 1). U oblastima oko te dve tačke moguće je stabilno kretanje objekta zanemarive mase (Fitzpatrick 2012).

Jupiterovi Trojanci

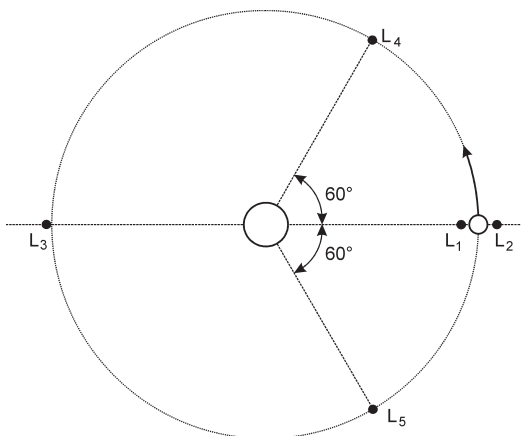
U Lagranževim tačkama L_4 i L_5 Jupitera nalaze se dve grupe asteroida koje se nazivaju Jupiterovi Trojanci. Bitna karakteristika ovih asteroida je da se nalaze u 1:1 rezonanci u srednjem kretanju sa Jupiterom, tj. period revolucije oko Sunca im je jednak Jupiterovom. Smatra se da njih ima bar koliko i asteroida u glavnom asteroidnom pojasu (Marzari *et al.* 2002), iako je broj do sada zavedenih Trojanaca 4078 u L_4 i 2180 u L_5 (Minor Planet Center 2015). Velika poluosa i ekscentricitet obe grupe asteroida su približno isti i iznose, redom, $a = 5.2$ AU i $e = 0.07$. Srednja vrednost inklinacija se razlikuje, u L_5 je veća nego u L_4 : $i(L_5) = 14^\circ.2$ i $i(L_4) = 10^\circ.4$ (Di Sisto *et al.* 2014).

Anđelka Milovanović (1996), Valjevo, Somborska 33, učenica 3. razreda Valjevske gimnazije

MENTORI:

dr Bojan Novaković, Katedra za astronomiju, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu

Dušan Pavlović, student Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu



Slika 1. Lagranževe tačke

Figure 1. Lagrangean points

Bilo je pokušaja da se što bolje objasni dinamika kretanja Trojanaca u L_4 i L_5 , pre svega teorijski, sa osnovama u redukovanom problemu tri tela. To je usmerilo teorijska istraživanja Jupiterovih Trojanaca u dva pravca – s jedne strane ka njihovoj dugoročnoj evoluciji, tj. dinamičkoj stabilnosti, a s druge strane ka njihovim orbitama.

Sa teorijske strane, između L_4 i L_5 ne postoji razlika u dinamici kretanja, ali posmatranja pokazuju da razlika postoji u broju do sada otkrivenih asteroida u njima (Di Sisto *et al.* 2014). Bilo je pokušaja da se ta razlika objasni uvođenjem gravitacionih uticaja ostalih planeta Sunčevog sistema, prisustvom gasnog trenja (Marzari i Scholl 2002) i migracija planeta pri nastanku Sunčevog sistema (Gomes 1998, prema: Marzari *et al.* 2002). Međutim, asimetrija u broju otkrivenih Jupiterovih Trojanaca u L_4 i L_5 je i dalje nerešen problem u dinamici Sunčevog sistema.

Stabilnost

Dugoročna stabilnost orbita Jupiterovih Trojanaca je bitna u dinamici kretanja asteroida. Kada se uzmu u obzir rezultati iz modela sa redukovanim problemom tri tela, postoje dodatni potencijalni izvori nestabilnosti koje treba uzeti u obzir. U pitanju su gravitacioni i negravitacioni efekti koji dovode do promene orbita, kao i rezonance (u srednjem kretanju i/ili sekularne). Mi-

lani (1993, 1994) je numeričkim simulacijama pokazao da Jupiterovi Trojanaci imaju haotične orbite. Levison i saradnici (Levison *et al.* 1997, prema Marzari *et al.* 2002) su prvi koji su numeričkim simulacijama pokazali da postoji spora disperzija asteroida na vremenskoj skali uporedivoj sa starošću Sunčevog sistema. Jedan od načina da se opiše spora disperzija asteroida je proces haotične difuzije (Morbidei 2001).

Cilj ovog rada je ispitivanje gravitacionog uticaja tri najmasivnija Jupiterova Trojanca iz oblasti Lagranževe tačke L_4 (1437 Diomedes, 911 Agamemnon, 624 Hektor) na haotičnu difuziju 1000 fiktivnih Trojanaca u toj oblasti.

Metod

Fizički model i numeričke simulacije

U radu su posmatrana dva modela. Jedan, koji se sastoji od 1000 fiktivnih Trojanaca u L_4 koji gravitaciono interaguju sa spoljašnjim planetama Sunčevog sistema (Jupiterom, Saturnom, Uranom i Neptunom). Drugi je model u kome su pored uticaja spoljašnjih planeta na 1000 fiktivnih Trojanaca u L_4 , uzeti u obzir i uticaji tri najmasivnija asteroida iz te oblasti (1437 Diomedes, 911 Agamemnon, 624 Hektor). Jednačine kretanja objekata rešavane su numerički, sa istim početnim uslovima u oba modela, koristeći softverski paket OrbFit 4.2 (<http://adams.dm.unipi.it/~orbmain/orbfit/>). Numerički integrator ovog softvera omogućava analiziranje orbita asteroida i drugih tela Sunčevog sistema za dug vremenski period, a ceo paket sadrži i program za izračunavanje sopstvenih elemenata (videti naredni odeljak), Ljapunovljevoj eksponenta, itd.

Vremenski period integracije u oba seta numeričkih simulacija iznosio je 50 miliona godina sa adaptivnim vremenskim korakom, koji je u ovom slučaju pogodan zbog međusobnih bliskih prolaza. Svaki objekat na početku simulacije predstavljen je svojim početnim uslovima. Za 1000 fiktivnih Trojanaca početni uslovi su izgenerisani, a za spoljašnje planete i tri najmasivnija Trojanca su preuzeti iz JPL (Jet Propulsion Laboratory) Horizons baze efemerida, za početnu epohu: $t_0 = 2.4568005000000000D+06$.

Generisani katalog parametara asteroida sastoji se od orbitalnih elemenata, na osnovu kojih je definisana početna orbita svakog asteroida. U ovom radu ti orbitalni elementi su generisani slučajno u prethodno definisanim granicama. Granice su postavljene na osnovu dobijenih podataka iz posmatranja orbitalnih elemenata asteroida koji se nalaze u oblasti oko L_4 i preuzete su iz rada (Di Sisto *et al.* 2014). Tako su granice za veliku poluosu, ekscentricitet i inklinaciju:

$$5.01 \text{ AU} \leq a \leq 5.4 \text{ AU}$$

$$0 \leq e \leq 0.34$$

$$0^\circ \leq i \leq 60^\circ.$$

Longituda perihela je $\varpi = \varpi_j + 60^\circ$ (gde je ϖ_j longituda perihela Jupitera), a longituda uzlaznog čvora i srednja anomalija su uzete da budu jednake Jupiterovoj.

Sopstveni elementi i haotična difuzija

Izlazni parametri numeričkih simulacija su *sopstveni elementi* asteroida. Oni predstavljaju konstante njihovog kretanja koje ostaju nepromenjene tokom desetina miliona godina. Ovi sopstveni elementi su rezultat eliminacije kratkoperiodičnih perturbacija onih orbitalnih elemenata koji se periodično menjaju tokom vremena (Knežević *et al.* 2002). Još ranije, Milani (1993) je identifikovao postojanje haotičnih orbita Trojanaca i definisao postojanje nagomilavanja u prostoru sopstvenih orbitalnih elemenata (Di Sisto *et al.* 2014), što znači da sopstveni elementi mogu biti indikatori postojanja haotičnih orbita, a njihova promena na dužim vremenskim skalama indikator haotične difuzije.

Kako je vremenski period simulacije 50 miliona godina, broj asteroida u L_4 nakon tog perioda se smanjio, pošto je došlo do promene sopstvenih elemenata koje su kod nekih asteroida dovele do destabilizovanja orbita (orbita im se promenila toliko da su napustili definisanu oblast).

U daljem radu analizirani su asteroidi koji su nakon integracije ostali u oblasti oko L_4 . Ispitana je haotična difuzija tih asteroida tako što su podaci o njihovim sopstvenim elementima računati na svakih 5 miliona godina. Za svaki taj interval fiktivnim Trojanacima određivane su veličine koje nazivamo *akcije* i koje su definisane na sledeći način (Novaković *et al.* 2010):

$$J_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a_j + da_p}{a_j}} e_p^2 \quad (1)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a_j + da_p}{a_j}} \sin^2 i_p \quad (2)$$

gde je a_j velika poluosu Jupitera, da_p amplituda oscilovanja sopstvene velike poluose Trojanaca u odnosu na veliku poluosu Jupitera, e_p sopstveni ekscentricitet i i_p sopstvena inklinacija asteroida. Član pod korenom govori kolika je amplituda libracije sopstvene velike poluose asteroida oko ravnotežne tačke, tj. koliko se menja njihova udaljenost u odnosu na Jupiter, pošto ne zadržavaju fiksnu udaljenost od Jupitera.

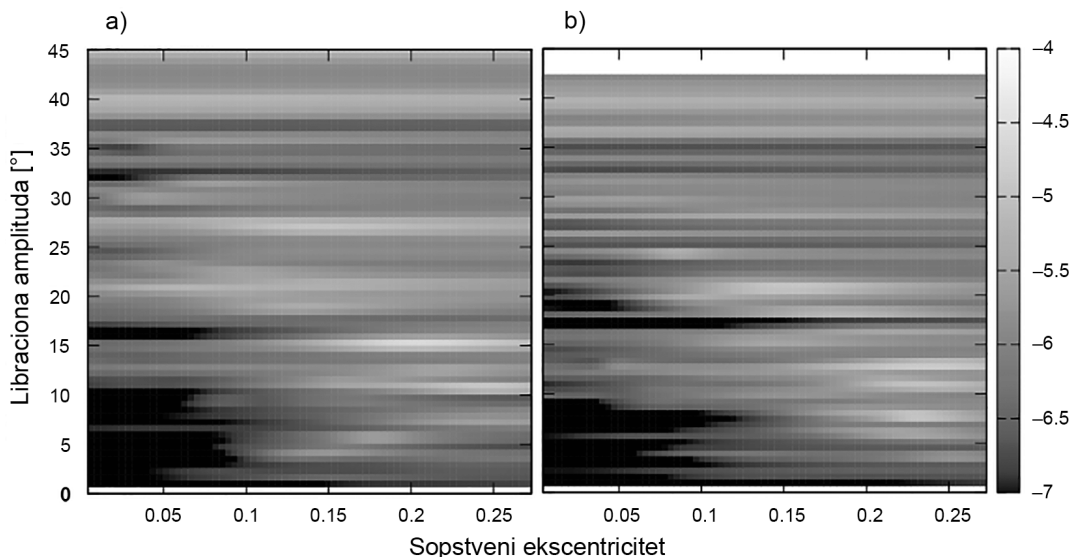
Zavisnost akcije od vremena aproksimirana je linearnom funkcijom (Novaković, lična komunikacija), čime su za svaki asteroid dobijeni koeficijenti haotične difuzije (na vremenskoj skali od 50 miliona godina). Ovako dobijeni koeficijenti su uzeti za meru procesa haotične difuzije: što je koeficijent haotične difuzije veći, veća je brzina promene akcija, pa je samim tim orbita objekta nestabilnija, i obrnuto.

Kako je akcija J_1 direktno povezana sa sopstvenim ekscentricitetom, koeficijenti haotične difuzije su prikazani u ravni libracione amplitude i sopstvenog ekscentriciteta ($D-e_p$ ravni). Akcija J_2 opisuje promenu u nagibu, pa su tom slučaju koeficijenti difuzije predstavljeni u ravni libracione amplitude i sinusa sopstvene inklinacije ($D-\sin i_p$ ravni). Na mapama pomenutih prostorâ parametara mogu se uočiti zone stabilnosti, a upoređivanjem tih zona ispitati eventualni uticaj masivnih Trojanaca.

Rezultati i diskusija

Vrednosti dobijenih koeficijenata haotične difuzije iz akcije J_1 predstavljeni su na mapama definisanim prostorom parametara sopstvenih ekscentriciteta i libracionih amplituda asteroida, (slika 2). Na isti način su prikazani i koeficijenti iz akcije J_2 na mapama sa prostorom parametara sinusa sopstvenih inklinacija i libracionih amplituda (slika 3).

Na osnovu dobijenih rezultata sa slike 2 se može primetiti da postoje grupisanja asteroida, tj. da asteroidi sa malim libracionim amplitudama i



Slika 2. Koeficijenti haotične difuzije za akciju J_1 u prostoru libracionih amplituda i sopstvenih ekscentriciteta za model sa uračunatim uticajem spoljašnjih planeta (a) i model kada je, osim uticaja spoljašnjih planeta, uračunat i uticaj masivnih Trojanaca (b). Tamnije oblasti predstavljaju zone sa manjim vrednostima koeficijenata haotične difuzije, odnosno oblasti stabilnijeg kretanja. U gornjem delu mape b) uočava se belina koja ukazuje na veliki porast koeficijenata haotične difuzije za vrednosti libracione amplitude $\sim 42^\circ$. Sasvim desno prikazana je skala vrednosti koeficijenata haotične difuzije.

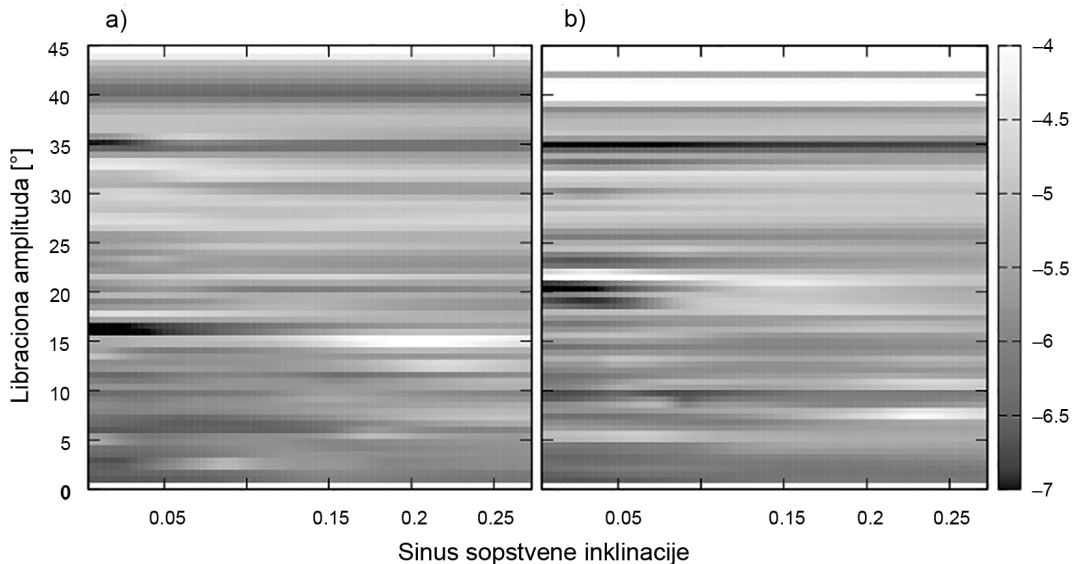
Figure 2. Coefficients of chaotic diffusion for action J_1 in the parameter space of librational amplitudes and proper eccentricities, for the model with gravitational influences from the outer planets included (a) and for the model in which, beside the influences from the outer planets, the gravitational influence from massive Trojans is included. Darker regions present zones with smaller values of coefficients of chaotic diffusion, or regions of more stable motion. In the upper part of the map b) the whiteness which indicate a big increase of coefficients of chaotic diffusion for the values of librational amplitudes $\sim 42^\circ$ can be noticed. On the far right, the scale for the values of those coefficients is shown.

sopstvenim ekscentricitetima formiraju region stabilnosti na mapi kome odgovaraju znatno manji koeficijenti haotične difuzije nego na ostalom delu mape. Takođe, uočava se da raspodela koeficijenata difuzije na ove dve mape nije ista. Najveća razlika je za vrednosti libracione amplitude $\sim 42^\circ$, gde se na mapi 2b, tj. u modelu sa masivnim asteroidima, primećuje veliki porast koeficijenata haotične difuzije (beli deo), što znači da su asteroidi u tom delu u većoj meri destabilizovani.

U odnosu na prostor parametara sa sopstvenim ekscentricitetom, u prostoru parametara sa sopstvenom inklinacijom (slika 3) razlike u koeficijentima haotične difuzije su manje, osim za velike vrednosti libracionih amplituda. U tim oblastima primećuju se veće razlike, odnosno

destabilizacija po sopstvenim inklinacijama je veća.

Bolje mapiranje zone uticaja masivnih Trojanaca moglo bi se postići na dva načina. Kao prvo, trebalo bi značajno povećati broj fiktivnih asteroida, što bi u velikoj meri popravilo rezoluciju dobijenu na slikama 2 i 3. Drugo, trebalo bi unaprediti sam model haotične difuzije, koji bi uzeo u obzir nelinearne promene, za razliku od linearne aproksimacije koja je korišćena u ovom radu (Novaković, lična komunikacija). Na ovaj način dobila bi se mnogo jasnija slika o uticaju masivnih Trojanaca na svoje najbliže susede. Mogućnosti za dalji rad su i ispitivanje ovakvih uticaja na haotičnu difuziju Trojanaca u oblasti Lagranževе tačke L_5 , na osnovu čega se može ispitati i doprinos haotične difuzije ne asimetriju u broju Trojanaca u L_4 i L_5 .



Slika 3. Koeficijenti haotične difuzije za akciju J_2 u prostoru libracionih amplituda i sinusa sopstvenih inklinacija za model sa uračunatim uticajem spoljašnjih planeta (a) i model kada je, osim uticaja spoljašnjih planeta, uračunat i uticaj masivnih Trojanaca (b). Tamnije oblasti predstavljaju zone sa manjim vrednostima koeficijenata haotične difuzije, odnosno oblasti stabilnijeg kretanja. U gornjem delu mape 3b uočavaju se zone koje ukazuje na veliki porast koeficijenata haotične difuzije za vrednosti libracione amplitude oko 40° . Sasvim desno prikazana je skala vrednosti koeficijenata haotične difuzije.

Figure 3. Coefficients of chaotic diffusion for action J_2 in the parameter space of librational amplitudes and proper inclination sines, for the model with gravitational influences from the outer planets included (a) and for the model in which, beside the influences from the outer planets, the gravitational influence from massive Trojans is included. Darker regions present zones with smaller values of coefficients of chaotic diffusion, or regions of more stable motion. In the upper part of the map b) the whiteness which indicate a big increase of coefficients of chaotic diffusion for the values of librational amplitudes around 40° can be noticed. On the far right, the scale for the values of those coefficients is shown.

Zaključak

Na osnovu numeričkih simulacija dinamičke evolucije Jupiterovih Trojanaca u oblasti L_4 i analizom njihove haotične difuzije u prostorima parametara određenim libracionom amplitudom i sopstvenim ekscentricitetom (odnosno sopstvenom inklinacijom) uočene su razlike u koeficijentima haotične difuzije između modela bez gravitacionog uticaja masivnih Trojanaca u ovoj oblasti, i modela u kojem je taj uticaj uračunat. Ove razlike ukazuju na to da masivni Trojanci gravitaciono utiču na haotičnu difuziju i stabilnost asteroida u L_4 . Ovaj rezultat može biti od značaja kako za ispitivanje stabilnosti Jupiterovih Trojanaca, tako i za pokušaj da se objasni

asimetrija u broju Jupiterovih Trojanaca u oblastima oko Lagranževih tačaka L_4 i L_5 .

Zahvalnost. Veliku zahvalnost dugujem Milanu Darijeviću na korisnim kritikama, sugestijama i razgovorima, kao i Andreju Obuljenu na pomoći oko programiranja. Posebno se zahvaljujem svojim mentorima, Bojanu Novakoviću i Dušanu Pavloviću, bez čijih smernica i stalne pomoći rad ne bi bio završen.

Literatura

Di Sisto R. Ramos X., Beaugé C. 2014. Giga-year evolution of Jupiter Trojans and the asymmetry problem. *Icarus*, **243**: 287

Fitzpatrick R. 2012. *An Introduction to Celestial Mechanics*. New York: Cambridge University Press

Gomes R. S. 1998. Dynamical effects of planetary migration on primordial Trojan type asteroids. *Astronomical Journal*, **116**: 2590.

Knežević Z., Lemaître A., Milani A. 2002. The Determination of Asteroid Proper Elements. U *Asteroids III* (ur. W. F. Bottke Jr. *et al.*), USA: The University of Arizona Press, str. 603-612.

Levison H., Shoemaker E. M., Shoemaker C. S. 1997. Dynamical evolution of Jupiter's Trojan asteroids. *Nature*, **385**: 42.

Marzari F., Scholl H. 2002. On the Instability of Jupiter's Trojans. *Icarus*, **159**: 328

Marzari F., Scholl H., Murray C., Lagerkvist C. 2003. Origin and Evolution of Trojan Asteroids. U *Asteroids III* (ur. W. F. Bottke Jr. *et al.*), USA: The University of Arizona Press, str. 725-738.

Milani A. 1993. The Trojan asteroid belt: Proper elements, stability, chaos and families. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **57**: 59.

Milani A. 1994. The Dynamics of the Trojan Asteroids. U *Asteroids, comets, meteors 1993* (ur. A. Milani *et al.*). Den Haag: IAU, str. 159-174.

Morbidelli A. 2001. Chaotic Diffusion in Celestial Mechanics. *Regular and Chaotic Dynamics*, **6**: 339

Novaković B., Tsiganis K., Knežević Z. 2010. Chaotic transport and chronology of complex asteroid families. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **402**: 1263

Tsiganis K., Varvoglis H., Dvorak R. 2005. Chaotic diffusion and effective stability of

Jupiter Trojans. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **92**: 71

Anđelka Milovanović

Gravitational Influence of Massive Jupiter Trojans on Stability of Motion in L_4 region

Gravitational influence of three most massive Jupiter Trojans from the region of Lagrangian point L_4 (1437 Diomedes, 911 Agamemnon, 624 Hektor) on movement stability of 1000 fictitious asteroids in that region is investigated. In the OrbFit 4.2 software package, dynamical evolution of that asteroids is simulated numerically for a time period of 50 Myr. After that time, some asteroids remain in that region, but some are ejected by perturbations. The results obtained in the two sets of simulations were compared. The first one, where gravitational influences of the Solar system outer planets are taken into account, and the second, where both gravitational influences of outer planets and massive Trojans are investigated. Using the same software, proper elements are obtained for the remaining asteroids and the stability in the L_4 region is investigated for both cases. The results are presented in the plane of libration amplitude and proper eccentricity and in the plane of libration amplitude and proper inclination sine. On the basis of such views, the stability zones in this parameter space are noticed. By comparing them (from both sets of simulation), noticeable differences are seen. It was concluded that massive Trojans affect the stability of asteroid's orbits by gravitational influence. This is a significant result which suggests that in the analysis of the stability of Jupiter Trojans their mutual gravitational disturbances should be taken into account. 